

## توان دوم گراف های بلوکی جهت دار

میرمظفر معصومی، فرهاد حسین زاده لطفی، محسن رستمی مال خلیفه، زهره کمرانیان زاده\*

گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم تحقیقات، تهران، ایران

رسید مقاله: ۸۹/۳/۲۴

پذیرش مقاله: ۸۹/۶/۲۷

### چکیده

در این مقاله مربع گراف های جهت دار مورد بحث قرار می گیرد.  $H^2$  مربع گراف  $H$  است که به وسیله اضافه کردن یال هایی در  $H$  که دو رأس میجزا را که فاصله بین آن ها دقیقاً ۲ باشد را به هم وصل می کند، به دست می آید. (در صورتی که  $H$  یک گراف غیر جهت دار باشد). در این مقاله به بررسی توان دوم گراف های جهت دار برای اولین بار پرداخته شده و قضایای مرتبط با این موضوع و مثال هایی جهت تشریح مطلب بیان می شود.

**کلمات کلیدی:** گراف جهت دار، مربع (توان دوم) گراف، مدار، گراف وتری.

### ۱ مقدمه

روس و هراری در سال ۱۹۶۰ مربع درختان را مشخص کردند و نشان دادند که ریشه های دوم درخت در زمانی که آن ها موجود هستند منحصر به فرد است. پس از آن ماخ پادهای در سال ۱۹۶۷ خصوصیات گراف هایی که ریشه مربعی دارند را فراهم آورد؛ این خصوصیات برحسب یک سری از زیرگراف های کامل که ویژگی های معینی دارند بیان شده است. و اخیراً در سال ۲۰۰۹ مربع گراف های دو بخشی مطرح شد. و بنگ و تای در سال ۲۰۱۰ مربع گراف های بلوکی بیان کردند و ویژگی های مرتبط مربع های گراف های بلوکی می پردازد. براساس این ویژگی ها یک مشخصه خوب برای گراف هایی که مربع گراف های بلوکی هستند به دست آوردند. با این توضیح که گراف های مورد بحث در این مقالات گراف های غیر جهت دار است. در این مقاله پس از ارائه روشی برای به دست آوردن توان دوم یک گراف جهت دار، توان دوم یک گراف دلخواه را در قالب یک مثال آورده ایم.

\*عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: Z\_Kamran65@yahoo.com

## ۲ توان دوم گراف

در این بخش، بعضی از مفاهیم ضروری در ارتباط با توان دوم گراف جهت دار ارائه می شوند. یک گراف  $H$ ، ریشه مرتبه دوم از یک گراف  $G$  و  $G$  مرتبه دوم گراف  $H$  است؛ می نویسیم  $G = H^2$ ، در این صورت دو رأس مجزا به وسیله یک یال در  $G$  به هم متصل شوند اگر و فقط اگر فاصله آن ها در  $H$  ۲ باشد.

گراف های در نظر گرفته شده جهت دار متناهی و ساده هستند. فرض کنید  $G = (V, E)$  یک گراف باشد، همسایگی یک رأس  $u$  در  $G$  برابر است با مجموعه رأس های انتهایی کمان هایی که از  $u$  خارج می شوند و با  $\Gamma_u^+$  نمایش می دهیم، مجموعه رأس های ابتدایی کمان هایی که به  $u$  ختم می شوند را با  $\Gamma_u^-$  نمایش می دهیم، همسایگی  $u$  را به صورت  $\Gamma_G(u) = \Gamma_u^+ \cup \Gamma_u^-$  در نظر می گیریم. همسایگی نزدیک رأس  $u$  در  $G$  را با  $\Gamma_G[u] = \Gamma_G(u) \cup \{u\}$  نمایش می دهیم. فرض کنید  $d_G(x, y)$  فاصله باشد یعنی تعدادی از کمان ها از کوتاه ترین راه در  $G$  بین  $x, y$  باشد.

آن گاه  $G^2 = (V_{G^2}, E_{G^2})$  با  $V_{G^2} = V_G$  و  $(s, x) \in E_{G^2}$  اگر  $(x, z), (z, s) \in E_G$  و  $G^2$  توان دوم گراف  $G$  است. یک مجموعه رئوس  $(Q \subseteq V_G)$  را یک خوشه از  $G$  می نامیم اگر هر دو رأس مجزا در  $Q$  توسط راهی مقدماتی به مرتبط باشند. (راه مقدماتی راهی است که کمان های پیوسته در یک جهت طی شده باشند و هیچ رأس تکرار نشود). هم چنین خوشه ماکسیمال خوشه ایست که زیر مجموعه خوشه های دیگر نباشد. ضمن اینکه رأسی که در دو خوشه مشترک است و به عبارتی دو خوشه را از هم جدا می کند رأس برشی می گوئیم.

گراف  $G$  را تری (مثلثی شده) گوئیم اگر در  $G$  مداری به طول بیشتر از ۴ داشته باشیم آن گاه باید در این مدار، حداقل یک وتر وجود داشته باشد. با این توضیح که یک مدار یک راه مقدماتی با پایان و بسته است به طوری که ابتدا و انتهای آن بر هم منطبق باشند.

یک گراف بلوکی گراف است که بلوک های آن به صورت خوشه ها باشند. حال برای به دست آوردن خوشه های یک گراف ما از الگوریتم زیر استفاده می کنیم. لازم است قبل از توضیح الگوریتم تعاریفی داشته باشیم که آن ها در این قسمت می آوریم.  $G_a$  یک زیر گراف  $G$  را مولفه به هم بسته گوئیم اگر  $G_a$  همبند باشد.  $G_a$  را مولفه به هم بسته قوی گوئیم اگر به ازای هر رأس دلخواه راهی تا رئوس دیگر باشد. اگر  $G_a$  مولفه به هم بسته قوی نباشد؛ مولفه به هم بسته ضعیف گوئیم. در واقع در مولفه به هم بسته ضعیف حداقل یک رأس وجود دارد که از آن رأس به رئوس دیگر راهی نداریم.

مسدودی متعدی: فرض کنید  $G = (V, E)$  آن گاه مسدودی متعدی در نقطه  $x \in V$  را تعریف می کنیم:

$$\hat{\Gamma}_x = \{x\} \cup \Gamma_x \cup \Gamma_x^2 \cup \Gamma_x^3 \cup \dots \cup \Gamma_x^n \cup \dots = \{x\} \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma^n$$

**مسدودی متعدی معکوس** عبارتست از مجموعه رئوسی که ابتدای کمان هایی هستند که انتهای آن ها به  $x$  می رسد، و آن را با  $\hat{\Gamma}_x^-$  نمایش می دهیم که به این صورت معرفی می کنیم:

$$\hat{\Gamma}_x^- = \{x\} \cup \Gamma_x^- \cup \Gamma_x^{-2} \cup \Gamma_x^{-3} \cup \dots \cup \Gamma_x^{-4} \cup \dots = \{x\} \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_x^{-n}$$

فرض کنید  $G = (V, E)$  و  $x \in V$ ، کلاس هم ارزی  $x$  تعریف می کنیم:

$$\mathcal{E}(x) = \hat{\Gamma}_x \cap \hat{\Gamma}_x^-$$

در گراف  $G = (V, E)$ ، رأس  $x \in V$  و غنی ترین ارتباط رأس های ممکن با رأس  $x$  یک مولفه به هم بسته قوی را تشکیل می دهند این مولفه را زیر گراف قوی به هم بسته گراف نامند و به این طریق می توان رأس های یک گراف را به کلاس هایی تفکیک کرد.

$$\mathcal{E}(x) = \hat{\Gamma}_x \cap \hat{\Gamma}_x^-$$

این کلاس ها، کلاس های هم ارزی هستند که زیر گراف های به هم بسته قوی ماکسیمال را تشکیل می دهند و به عبارتی این زیر گراف های به هم بسته قوی ماکسیمال در این گراف های جهت دار همان خوشه ها هستند.

### ۳ توان دوم گراف های جهت دار

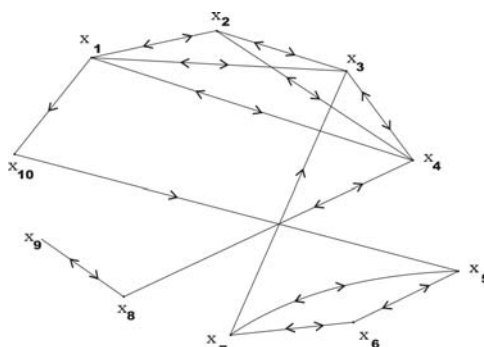
در این مقاله ما به دنبال پیدا کردن توان دوم گراف های جهت دار هستیم. برای رسیدن به این هدف ابتدا یک گراف دلخواه را به صورت بلوک های مجزا رسم خواهیم کرد و پس از آن هر دو رأس مجزا که بین آن ها راهی به طول ۲ داریم از انتهای رأس دوم به ابتدای رأس اول کمسانی رسم می کنیم. در واقع مداری به طول می سازیم.

ما در این قسمت با استفاده از یک الگوریتم اجرا شده برای به دست آوردن زیر گراف های به هم بسته قوی ماکسیمال بلوک ها را در یک گراف دلخواه شناسایی می کنیم و پس از آن که گراف بلوکی جدا شده مشخص شد می توانیم به راحتی توان دوم گراف را مشخص کنیم. هم چنین قضایایی که برای گراف های بی جهت بوده است برای گراف های جهت دار اثبات کرده ایم. برای تشریح این مطالب در ذیل مثالی می آوریم:

**مثال ۳-۱** گراف  $H = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$  با کمان های زیر دز نظر بگیرید:

$$E = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_1, x_{10}), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_4, x_1), (x_4, x_2), (x_4, x_3), (x_4, x_6), (x_4, x_8), (x_5, x_6), (x_5, x_7), (x_5, x_9), (x_6, x_5), (x_6, x_7), (x_7, x_3), (x_7, x_5), (x_7, x_6), (x_8, x_9), (x_9, x_8)\}$$

این گراف را در شکل ۱ رسم کرده ایم.



شکل ۱. گراف H

حال به روش الگوریتم گفته شده زیر گراف های به هم بسته قوی ماکسیمال گراف شکل ۱ را پیدا می کنیم برای پیدا کردن مولفه های همبند (زیر گراف های به هم بسته قوی ماکسیمال) کلاس های هم ارزی را برای این گراف می نویسیم؛ کلاس هم ارزی  $x_1$  عبارت است از:

$$\mathcal{E}(x_1) = \hat{\Gamma}_{x_1} \cap \hat{\Gamma}_{x_1} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

و هم چنین داریم:

$$\mathcal{E}(x_5) = \hat{\Gamma}_{x_5} \cap \hat{\Gamma}_{x_5} = \{x_5, x_6, x_7\}$$

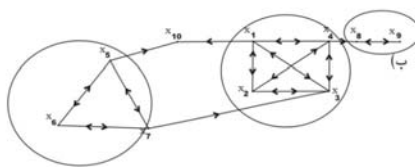
و

$$\mathcal{E}(x_8) = \hat{\Gamma}_{x_8} \cap \hat{\Gamma}_{x_8} = \{x_8, x_9\}$$

و کلاس هم ارزی  $x_{10}$  عبارت است از:

$$\mathcal{E}(x_{10}) = \hat{\Gamma}_{x_{10}} \cap \hat{\Gamma}_{x_{10}} = \{x_{10}\}$$

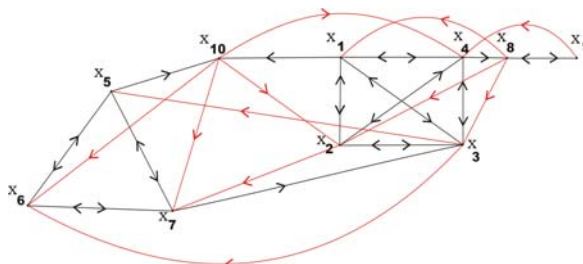
حال با استفاده از این کلاس های هم ارزی زیر گراف های به هم بسته قوی ماکسیمال در شکل ۲ مشخص است:



شکل ۲. مرتب شده گراف H با استفاده از کلاس های هم ارزی

حال گراف مرتب شده را  $H$  می نامیم و در شکل ۳ آمده است،  $G = H^2$  را به روشی که در این مقاله عنوان کردیم که عبارت است از هر راهی که به طول ۲ داشتیم از انتهای آن به ابتدای آن کمانی رسم کنیم؛ به دست آورده ایم. روش پیشنهادی خود را روی همین مثال عنوان می کنیم؛ به طور مثال از رأس  $x_1$  به رأس  $x_8$  راهی به

طول ۲ وجود دارد بنابراین از  $x_8$  به  $x_1$  یک کمان رسم می کنیم. هم چنین از  $x_4$  به  $x_9$  راهی به طول ۲ وجود دارد بنابراین کمانی از  $x_9$  به  $x_4$  رسم می کنیم و به همین ترتیب کمان های  $(x_3, x_5), (x_8, x_3), (x_8, x_2), (x_2, x_7), (x_3, x_6), (x_{10}, x_2), (x_{10}, x_7), (x_{10}, x_6), (x_{10}, x_4)$  را اضافه می کنیم (شکل ۳ را ببینید).



شکل ۳. گراف  $G = H^2$

فرض کنید  $x$  و  $y$  دو رأس غیر مجاور در در گراف  $G = (V_G, E_G)$  باشد. یک زیر مجموعه  $S \subseteq V_G$  یک جدا کننده  $x$  و  $y$  است، اگر  $x$  و  $y$  متعلق به اجزا همبند مختلف  $G - S$  باشد. یک جدا کننده  $x$  و  $y$  برای چند رئوس غیر هم جوار  $x$  و  $y$  است، یک جدا کننده مینیمال جدا کننده ای است که دیگر جدا کننده های  $x$  و  $y$  را شامل نمی شود.

لم ۱. فرض کنید  $G = H^2$  برای یک گراف بلوکی جهت دار باشد، در نظر بگیرید  $B$  یک بلوک انتهایی از  $H$  نباشد و فرض کنید  $x \neq y$  دو رأس برشی از  $H$  در  $B$  باشد. فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو مولفه همبند قوی ماکسیمال از  $H - B$  باشد؛ چنان که  $\Gamma_H(x) \cap X \neq \emptyset$  و  $\Gamma_H(y) \cap Y \neq \emptyset$  آن گاه  $B$  مینیمال جدا کننده  $x$  و  $y$  در  $G$  برای هر زوج  $x \in X$  و  $y \in Y$  است.

اثبات بدیهی است که  $B$  یک جدا کننده برای هر جفت از رأس های  $x \in X$  و  $y \in Y$  است. علاوه بر این در  $G$  هر رأس  $w \in B$  مجاور یک رأس در  $X$  و یک رأس در  $Y$  است. این نشان می دهد که  $w \in B$ ،  $x$  و  $y$  را جدا نمی کند. بنابراین  $B$  یک مینیمال جدا کننده  $x$  و  $y$  در  $G$  برای هر زوج  $x \in X$  و  $y \in Y$  است.

قضیه ۱ گراف  $G = H^2$  مثلثی (وتری) است.

اثبات اگر مداری به طول ۴ در این گراف در نظر بگیریم مثل  $xtkux$ ، چون طول  $(x, k)$  برابر دو است پس کمان  $(k, x)$ ، را در  $G$  داریم و هم چنین برای دو کمان  $(u, x), (k, u)$ ، کمان  $(x, k)$  را داریم بنابراین هر مداری که به طول چهار در نظر بگیریم وتر دارد بنابراین گراف  $G$  مثلثی شده است.

## ۴ نتیجه گیری

در این مقاله توان دوم گراف های جهت دار مطرح شد و وتری بودن توان دوم این گراف ها را ثابت کردیم و یک مثال با تمام جزئیات برای تشریح روش پیشنهادی بیان کردیم. حدس ما بر این است که توان های بالاتر را هم می توانیم با این تعریف مطرح کنیم. حال سوالی که مطرح است که می تواند زمینه ای برای تحقیقات آتی باشد این است که توان گراف های جهت دار تا چه مرتبه ای تعریف شده. مبحث دیگری که می توان مطرح کرد این که آیا الگوریتمی برای یافتن ریشه دوم یک گراف جهت دار وجود دارد. حدس ما بر این است که ریشه گراف های جهت دار منحصر به فرد است.

## منابع

- [1] Van Bang Le, Nguyen Ngoc Tuy, (2010) The square of a block graph, Discrete Mathematics 310 734-741.
- [2] Andraes Brandstadt, Van Bang Le, (2008), Simplicial powers of graphs, in: proceeding of the 2nd Annual International Conference on Combinatorial Optimization and Applications, COCOA'08", in: Lecture Notes in Comput. Science, vol. 5165, pp. 160-170.
- [3] C. Berge, (1973), Graphs and Hypergraphs , North-Holland, Lodon.
- [4] Lap Chi Lau, (2006), Bipartite roots of graphs, ACM Trans. Algorithms 2, 178-208. (Proceedings of the 15th Annual ACM-SIAM Symposium on Discerte Algorithms, SODA 2004, pp . 952 961) .
- [5] Rajeev Motwani, Madhu Sudan, (1994), Computing roots of graphs is hard, Discrete Appl. Math. 54 81-88.
- [6] A.Mukhopadhyay, (1967), The square root of a graph, J. Combin. Theory 2, 290-295.
- [7] I.C. Ross, Frank Harary, (1960), The square of a tree, Bell System Tech. J. 39, 641-647.