



مدلی جدید جهت تخمین مدول یانگ بتن پلیمری با استفاده از روابط میکرومکانیک

محمود مهرداد شکریه^{۱*}، مجتبی الهی^۲

۱- استاد مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
۲- کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
* تهران، صندوق پستی ۱۳۱۱۴-۱۶۸۴۶، Shokrieh@iust.ac.ir

چکیده- این تحقیق به تخمین مدول ارتجاعی مؤثر بتن پلیمری با استفاده از یک مدل میکرومکانیکی جدید اختصاص داده شده است. توانمندی روابط اینکلوزن معادل در تحقیقات بی‌شماری به‌اثبات رسیده است. مدل موری-تاناکا از پرکاربردترین روش‌های همگن‌سازی برای مواد مرکب دوفازی است. این مدل، در حالتی که ناخالصی‌های درون ماده مرکب دوفازی هم‌راستا بوده و درصد حجمی آن‌ها کم تا متوسط باشد، تانسور سفتی را با دقت خوبی تخمین می‌زند. با این حال، زمانی که درصد حجمی ناخالصی بالاست، این مدل قادر به تخمین تانسور سفتی با دقت مناسبی نیست. ضعف عمده مدل موری-تاناکا آن است که در درصد حجمی‌های بالا، در مدل اینکلوزن منفرد مرتبط، خواص عنصر تقویت‌کننده هرگز خواص ماتریس را تحت تأثیر قرار نمی‌دهد. ایده مدل ارائه‌شده در این تحقیق این است که در درصد حجمی‌های بالا، در محیط اینکلوزن منفرد مرتبط، فاز ماتریس باید تحت تأثیر خواص فاز تقویت‌کننده قرار بگیرد. جهت بررسی صحت نتایج این مدل با آزمایش، دوازده نمونه بتن پلیمری با دو ترکیب متفاوت ساخته و آزمایش شد. علاوه بر این از نتایج تحقیقات دیگر نیز جهت بررسی درستی این مدل استفاده گردید. مقایسه نتایج مدل پیشنهادی با نتایج آزمایشی و نتایج تحقیقات دیگران بر قابلیت این مدل صحه می‌گذارد.

کلیدواژگان: مدل‌های میکرومکانیک، روش اینکلوزن معادل، بتن پلیمری، خواص الاستیک

A new model to estimate the Young's modulus of polymer concrete using micromechanical relations

M. Mehrdad Shokrieh^{1*}, M. Elahi²

1- Prof., Mech. Eng., Iran Univ. of Science and Technology, Tehran, Iran
2- MSc. Student, Mech. Eng., Iran Univ. of Science and Technology, Tehran, Iran
* P. O. B. 16846-13114 Tehran, Shokrieh@iust.ac.ir

Abstract- This research is dedicated to the estimation of the effective elastic modulus of polymer concrete by a new proposed micromechanical model. The capability of the equivalent inclusion methods have been proved by numerous researches. The Mori-Tanaka (M-T) model is the most used homogenization scheme for two-phase composite materials. The M-T model provides good estimates of the stiffness tensor for two-phase composites with low to moderate volume fraction of aligned inclusions. However, when the volume fraction of reinforcing phase is high, the M-T model is unable to predict the stiffness tensor accurately. The major disadvantage of the M-T model is that when volume fraction is high, in the associated isolated inclusion medium (AIIM) the properties of the reinforcing phase does not affect the matrix properties. The idea of the current proposed model is that in high volume fraction in the associated isolated inclusion medium the matrix phase must be affected by the reinforcing phase properties. In order to evaluate this model with experimental results, twelve mixes with two different compositions were manufactured and tested. In addition, the results from other researches were used to evaluate this model. The validation of the proposed model with the experimental data and the results by other researchers shows remarkable predictive capability of this model.

Keywords: Micromechanical Model, Equivalent Inclusion Method, Polymer Concrete, Effective Elastic Properties

۱- مقدمه

کروی شکل ارائه گردیده است. روش پیشنهادی بر این اساس است که هرگاه درصد حجمی عنصر تقویت کننده بالا باشد، در مدل اینکلوژن ایزوله مرتبط، خواص ماتریس می‌بایست تحت تأثیر خواص عنصر تقویت کننده تغییر کند. این استنتاج با توجه به این واقعیت است که در درصد حجمی‌های بالا کافی است که جای ماتریس و اینکلوژن را در مدل موری-تاناکا عوض کنیم تا تقریب مناسبی به دست آید. این نشان می‌دهد که در درصد حجمی‌های بالاتر خواص ماتریس می‌بایست به خواص عنصر تقویت کننده نزدیک شود. هدف از انجام این تحقیق به دست آوردن مدول ارتجاعی مؤثر بتن پلیمری با استفاده از روابط اینکلوژن معادل و تخصیص مدل مناسبی جهت مدلسازی آن است. نتایج استفاده از مدل پیشنهادی با آزمایش و با نتایج المان محدود مورد ارزیابی قرار گرفته است. مقایسه نتایج بر نزدیکی جواب‌های مدل پیشنهادی با نتایج المان محدود و نتایج آزمایشی دلالت دارد. با این وجود مدل‌هایی نظیر مدل دیفرانسیلی و مدل لیلنس نیز توانایی تخمین مدول ارتجاعی مؤثر بتن پلیمری را با دقتی کمتر نسبت به مدل پیشنهادی دارا می‌باشند.

۲- مدل‌های اینکلوژن معادل

در روش اینکلوژن معادل، یک ناخالصی با یک ناحیه هم‌شکل آن ولی همجنس با ماتریس، که شامل کرنش ویژه است، جایگزین می‌شود. در این روش، بین میانگین حجمی تنش‌ها و میانگین حجمی کرنش‌های درون ماده مرکب از طریق تانسور الاستیک مؤثر ارتباط داده می‌شود.

در شکل ۱ یک ماده مرکب دوفازی و ماده همگن معادل آن نشان داده شده است. چنانچه مطابق شکل ۲ این محیط تحت کرنش یکنواخت دوردست قرار بگیرد، میدان‌های میانگین تنش و کرنش درون فازهای ماتریس و ناخالصی به صورت زیر خواهد بود:

$$\varepsilon^0 = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon dV = \frac{1}{V} \left(V_M \frac{1}{V_M} \int_{V_M} \varepsilon dV + V_I \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \varepsilon dV \right) = V_M \bar{\varepsilon}_M + V_I \bar{\varepsilon}_I \quad (1)$$

تانسور تمرکز کرنش (A) به صورت زیر تعریف می‌شود:

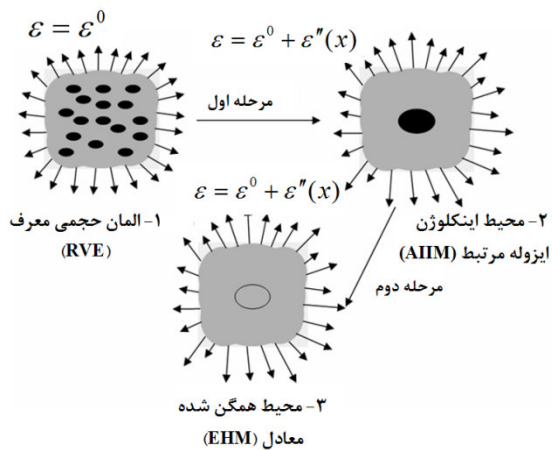
$$\bar{\varepsilon}_I = A : \varepsilon^0 \quad (2)$$

لذا:

هرگاه به جای آب و سیمان از رزین در ترکیب بتن استفاده شود، نتیجه آن بتن پلیمری است. بتن پلیمری وزن کمتری نسبت به بتن سیمانی معمولی دارد و استحکام آن نیز از بتن معمولی بالاتر است. همچنین، مقاومت بهتری در برابر محیط‌های شیمیایی و خوردنده دارد. این ویژگی‌های منحصر به فرد بتن پلیمری را به یک ماده ارزشمند مهندسی تبدیل کرده است. تعیین خواص مکانیکی در مقیاس ماکرو یکی از نیازهای اصلی مهندسی سازه است. روش‌های قدیمی سعی و خطا و روش‌های آماری، جهت رسیدن به خواص مکانیکی مطلوب، بسیار پرهزینه و زمان‌بر می‌باشند [۱]. مدلسازی ماده مرکب با استفاده از روش‌های میکرومکانیک روشی کم‌هزینه است که به کمک آن، علاوه بر تخمین خواص مکانیکی، می‌توان درصد حجمی اجزای سازنده ماده مرکب با خواص بهینه را نیز به دست آورد [۲]. روش‌های میدان-میانگین^۱، که بر پایه روش اشلیبی [۳] هستند، توانمندی قابل توجهی در مدلسازی رفتار ارتجاعی مواد مرکب دارند [۱]. برای همگن‌سازی مواد مرکب دوفازی روش‌های بسیاری ارائه شده است که در این میان روش موری-تاناکا [۴] نسبت به سایر روش‌ها مقبولیت بیشتری دارد. این روش برای مواد مرکب با درصد حجمی ناخالصی حداکثر تا ۳۰ درصد جواب نسبتاً دقیقی می‌دهد [۵]. ولی با بالا رفتن درصد حجمی فاز ناخالصی دقت این روش کاهش می‌یابد. برای همگن‌سازی مواد مرکب دوفازی با درصد حجمی ناخالصی بالاتر یکی از روش‌ها روش خودسازگار^۲ [۶] است. برخی از محققان در زمینه میکرومکانیک روش خودسازگار را بیشتر برای پلی-کریستال‌ها مناسب می‌دانند [۱]. روش دیفرانسیلی^۳ [۷] بر اساس افزودن تدریجی فاز ناخالصی به درون فاز همگن شده در مرحله قبل است. این عمل تا افزودن کامل فاز ناخالصی به درون ماتریس ادامه می‌یابد. در روش لیلنس [۸] ماتریس نرمی ماده همگن شده برابر ترکیب خطی ماتریس‌های نرمی به دست آمده از روش موری-تاناکا و موری-تاناکای معکوس است.

با توجه به ضعف اکثر روابط میکرومکانیک در همگن‌سازی مواد مرکب با درصد بالای ناخالصی، در این تحقیق یک روش جدید برای همگن‌سازی مواد مرکب دوفازی با ناخالصی‌های

1. Mean-field
2. Self-consistent
3. Differential scheme



شکل ۳ شماتیک همگن‌سازی به روش M-T

$$A_{I(MT)} = [I + C_M S C_M^{-1} (C_I - C_M)]^{-1} \quad (6)$$

$$C_{(MT)}^* = C_M + C_I (C_I - C_M) : A_{I(MT)} \quad (7)$$

یکی از معایب روش موری-تاناکا این است که در مدل محیط اینکلوژن منفرد مرتبط سفتی ماده زمینه برابر سفتی ماتریس فرض می‌شود. حال اگر درصد حجمی ناخالصی بالا باشد، می‌توان گفت که سفتی ماده مرکب بیشتر تحت تأثیر سفتی ناخالصی است تا سفتی ماتریس. در مدل پیشنهادشده در این تحقیق، این موضوع مورد بررسی قرار گرفته است.

۲-۲- همگن‌سازی به روش دیفرانسیلی

روش دیفرانسیلی [۷] بر مبنای جاسازی ناخالصی، درون ماتریس با گام‌های بسیار کوچک است. این روش می‌تواند با روش واقعی تولید مواد ناهمگن، که با افزودن تدریجی یک فاز درون ماتریس صورت می‌گیرد، مرتبط باشد. از آنجا که در هر گام فقط یک حجم ناچیز dV از فاز ناهمگنی با تانسور سفتی C_I درون حجم بی‌کران همگن‌شده ماتریس جاسازی می‌شود، مدل توزیع رقیق [۳] برای به‌دست آوردن خواص مؤثر دقیق می‌باشد. در یک گام دلخواه، زمانی که نسبت حجمی عناصر ناهمگنی به $c_i = \frac{V_I}{V}$ برسد، سفتی ماتریس با $C^*(c_i)$ نشان داده می‌شود.

تصویر شماتیک این روش در شکل ۴ نشان داده شده است. با اضافه کردن یک ناهمگنی کوچک و بیضوی dV می‌بایست یک حجم هم‌اندازه آن از ناحیه همگن ماتریس خارج گردد (یعنی حجم کل ثابت نگاه داشته شده است).

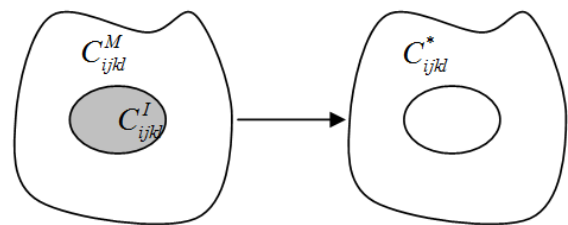
$$\bar{\varepsilon}_M = \frac{1}{V_M} (I - \nu_I A) : \varepsilon^0 \quad (3)$$

همچنین:

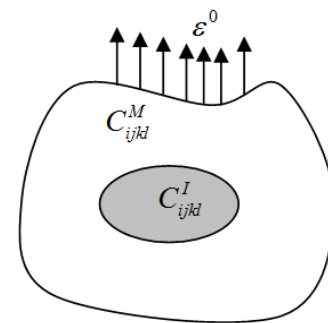
$$\bar{\sigma} = \frac{1}{V} \int \sigma dV = \nu_M \bar{\sigma}_M + \nu_I \bar{\sigma}_I \quad (4)$$

اگر تانسور الاستیک مؤثر را با C^* نشان دهیم:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= C^* : \varepsilon^0 = \nu_M C_M : \varepsilon_M + \nu_I C_I : \varepsilon_I \Rightarrow \\ C^* : \varepsilon^0 &= C_M : (I - \nu_I A) : \varepsilon^0 + \nu_I C_I : A : \varepsilon^0 \\ &= [C_M + \nu_I (C_I - C_M) : A] : \varepsilon^0 \Rightarrow \\ C^* &= C_M + \nu_I (C_I - C_M) : A \quad (5) \end{aligned}$$



شکل ۱ شکل سمت چپ: محیط ناهمگن، شکل سمت راست: محیط همگن‌شده معادل



شکل ۲ ماده مرکب دوفازی تحت کرنش یکنواخت دوردست

۲-۱- روش موری-تاناکا (M-T)

در روش موری-تاناکا [۴]، فرض می‌شود که هر ناهمگنی تحت تأثیر کرنش $\varepsilon''(x)$ ناشی از وجود ناهمگنی‌های اطرافش قرار دارد. در نتیجه علاوه بر میدان ε^0 می‌بایست میدان ε'' هم لحاظ شود (شکل ۳). روش موری-تاناکا زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که نسبت حجمی ناهمگنی‌ها مقدار متوسطی باشد (حداکثر درصد حجمی $c_i = 0.3$ باشد). [۵]. شکل ۳ نحوه همگن‌سازی به روش M-T را توضیح می‌دهد.

کران بالا:

$$C_{(HS^+)}^* = C_I + c_M [(C_M - C_I)^{-1} + c_I S_I : C_I^{-1}]^{-1} \quad (13)$$

و

$$C_{(HS^+)}^* \geq C^* \geq C_{(HS^-)}^* \quad (14)$$

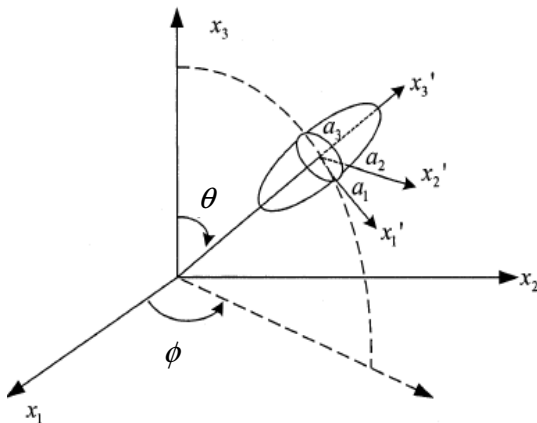
باید توجه شود که در روابطی نظیر رابطه لیلنس از این واقعیت که سفتی ماده مرکب درون کران‌های هشین و شیتریکمن قرار می‌گیرد استفاده شده است.

۲-۵- اثر جهت‌گیری اینکلوزن بر تانسور سفتی

اگر C_{ijkl} تانسور سفتی در مختصات محلی $x_1'x_2'x_3'$ و C_{rstu} تانسور سفتی در سیستم مختصات جهانی یا مرجع $x_1x_2x_3$ باشد (شکل ۵)، آنگاه از روش انرژی اثبات می‌شود [۱۲]:

$$\bar{C}_{ijkl} = a_{ir}a_{js}a_{kl}a_{lu}C_{rstu} \quad (15)$$

که در این روابط a_{mn} ماتریس تبدیل مختصات قدیم به مختصات جدید است.



شکل ۵ جهت‌گیری اینکلوزن و تأثیر آن روی ماتریس سفتی [۱۲]

اگر $Q(\theta, \phi)$ بیانگر خاصیت مرتبط با یک اینکلوزن در جهت (θ, ϕ) باشد، آنگاه برای حالتی که اینکلوزن‌ها در جهات مختلف هستند مقدار میانگین این خاصیت از رابطه زیر به دست می‌آید [۱۲]:

$$\bar{Q} = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} Q(\theta, \phi) \psi_i(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad (16)$$

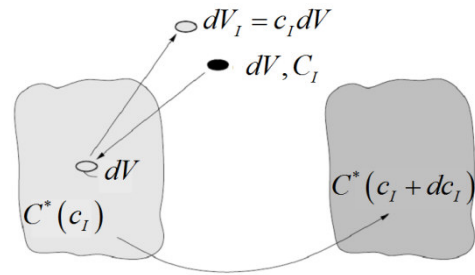
که $\psi_i(\theta, \phi)$ همان تابع توزیع جهت برای فاز i ام است. اگر تابع توزیع جهت ثابت فرض شود:

$$\bar{Q} = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} Q(\theta, \phi) \frac{\sin \theta}{4\pi} d\theta d\phi \quad (17)$$

$$\frac{dC^*(c_I)}{dc_I} = \frac{1}{1-c_I} (C_I - C^*(c_I)) : A_I^\infty \quad (8)$$

برای این معادله غیرخطی مقدار C^* در $c_I = 0$ برابر C_M یا سفتی ماتریس است. همچنین:

$$A_I^\infty = [I + S^*(C^*(c_I)) : C^{*-1}(c_I) : (C_I - C^*(c_I))]^{-1} \quad (9)$$



شکل ۴ تصویر شماتیک همگن‌سازی به روش دیفرانسیلی [۹]

۲-۳- همگن‌سازی با استفاده از مدل لیلنس

لیلنس [۸] نرمی ماده مرکب را برابر با ترکیب خطی نرمی‌های به‌دست آمده از روش موری-تاناکا و روش موری-تاناکای معکوس در نظر گرفت. در روش موری-تاناکای معکوس جای فاز ماتریس و ناخالصی عوض می‌شود [۱۰].

$$C_{(LiL)}^* = [(1-f(v))C_{MT}^{*-1} + f(v)C_{MT}^*]^{-1} \quad (10)$$

در این رابطه C_{MT}^* سفتی پیش‌بینی شده توسط رابطه موری-تاناکا و C_{MT}^{*-1} سفتی پیش‌بینی شده توسط موری-تاناکای معکوس است [۱۰]. بنا به پیشنهاد لیلنس $f(v)$ برابر مقدار زیر است:

$$f(v) = \frac{c_I + c_I^2}{2} \quad (11)$$

۲-۴- کران‌های هشین - شیتریکمن

بر اساس کران‌های هشین و شیتریکمن [۱۱]، سفتی یک ماده مرکب بین سفتی پیش‌بینی شده از رابطه موری-تاناکا و سفتی پیش‌بینی شده از رابطه موری-تاناکای معکوس خواهد بود. در رابطه موری-تاناکای معکوس، جای فاز ماتریس و ناخالصی عوض می‌شود. کران پایین:

$$C_{(HS^-)}^* = C_M + c_I [(C_I - C_M)^{-1} + c_M S_M : C_M^{-1}]^{-1} \quad (12)$$

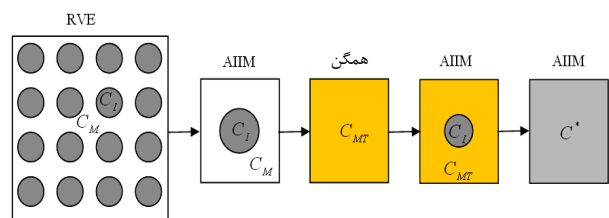
ماتریس تبدیل a_{ij} به صورت زیر است [۱۳]:

$$a = \begin{bmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & -\sin(\phi) & \cos(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\phi)\cos(\theta) & \cos(\phi) & \sin(\phi)\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (18)$$

حال اگر Q به عنوان سفتی معادل در حالتی که اینکلوژن‌ها هم‌جهت هستند در نظر گرفته شود، در حالتی که جهت‌گیری تصادفی است، سفتی معادل از رابطه (۱۶) به دست می‌آید.

۳- مدل پیشنهادی

در مدل ارائه شده در این تحقیق، همگن‌سازی مواد مرکب با درصد حجمی ناخالصی بالای ۳۰ درصد و با اینکلوژن‌های کروی در دو مرحله انجام می‌شود. در مرحله اول، به روش موری-تاناکا همگن‌سازی انجام می‌شود. باید توجه شود که سفتی به دست آمده از این روش از مقدار سفتی ماده همگن بیشتر نیست [۱۱]. در مرحله دوم، در مدل AIIM^۱ سفتی ماده زمینه برابر با مقدار سفتی موری-تاناکای همگن شده - با فرض جهت‌گیری تصادفی - در نظر گرفته می‌شود. مقدار C_I' (درصد حجمی ناخالصی در مرحله دوم) را می‌توان از معادله (۲۴) به دست آورد. تصویر شماتیک این نوع همگن‌سازی در شکل ۶ آمده است.



شکل ۶ شماتیک همگن‌سازی توسط مدل پیشنهادی زمانی که نسبت حجمی ناخالصی بالاست

در مرحله اول

$$A_1 = [I + c_M S_{C_M} C_M^{-1} (C_I - C_M)]^{-1} \quad (19)$$

$$C_{MT}^* = C_M + c_I (C_I - C_M) : A_1 \quad (20)$$

$$C_1^* = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} C_{MT}^*(\theta, \phi) \frac{\sin \theta}{4\pi} d\theta d\phi \quad (21)$$

1. Associated Isolated Inclusion Medium

در مرحله دوم

$$A_2 = [I + c_M' S_{C_1^*} C_1^{*-1} (C_I - C_1^*)]^{-1} \quad (22)$$

و

$$C_2^* = C_1^* + c_I' (C_I - C_1^*) : A_2 \quad (23)$$

درصد حجمی در مرحله دوم برای اینکلوژن کروی از رابطه (۲۴) به دست می‌آید:

$$a = 0.12c_i + 0.02$$

$$b = 128.8c_i - 40.9$$

$$c = 1.5c_i - 0.5$$

$$c_i' = a \left(\sqrt{\frac{E_I}{E_M}} - \sqrt{\frac{E_I}{E_M} + b} \right) + c \quad (24)$$

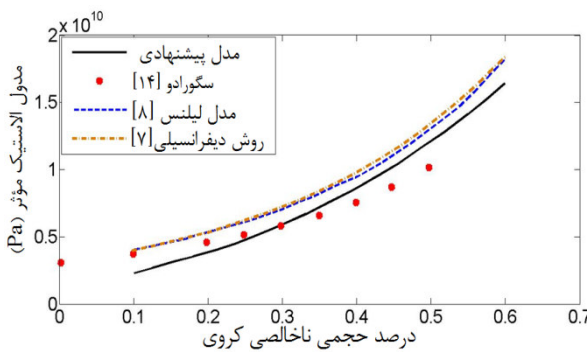
در معادله (۲۴)، E_I مدول ارتجاعی ناخالصی، E_M مدول ارتجاعی ماتریس و c_i درصد حجمی ناخالصی کروی است.

۴- آزمون کارایی مدل پیشنهادی

جهت بررسی کارایی مدل پیشنهادی از مقایسه نتایج این روش با نتایج المان محدود استفاده شده است.

مثال ۱: در یک ماده مرکب، ماتریس از رزین اپوکسی با مدول ارتجاعی $E_m = 3.16 \text{ GPa}$ و ضریب پواسون $\nu_m = 0.35$ و عناصر تقویت‌کننده، کره‌های سیلیسی با مدول ارتجاعی $E_i = 73.1 \text{ GPa}$ و ضریب پواسون $\nu_i = 0.18$ می‌باشند. داده‌های المان محدود مربوط به نسبت مدول ارتجاعی ماده مرکب به مدول ارتجاعی ماتریس برحسب درصد حجمی عناصر تقویت‌کننده سیلیسی در مرجع [۱] آمده است. در شکل ۷، نتایج همگن‌سازی به روش دیفرانسیلی، مدل لیلنس و مدل پیشنهادی با نتیجه تحلیل المان محدود [۱] مورد مقایسه قرار گرفته است. با توجه به شکل ۷، بدیهی است، برای درصد حجمی‌های بالای ۳۰ درصد، نتایج مدل پیشنهادی نزدیکی بیشتری با نتایج المان محدود دارد.

مثال ۲: در یک ماده مرکب ماتریس از رزین با مدول $E_m = 21 \text{ GPa}$ و ضریب پواسون $\nu_m = 0.25$ و عناصر تقویت‌کننده کروی با مدول ارتجاعی $E_i = 210 \text{ GPa}$ و ضریب پواسون $\nu_i = 0.25$ استفاده شده است. نتیجه تحلیل المان محدود بر روی این ماده در مرجع [۱۰] آمده است. در شکل ۸، نتایج مربوط به مدل پیشنهادی در این تحقیق، روش



شکل ۹ مقایسه نتایج مدل پیشنهادی با روشهای دیگر برای ماتریس با خواص $E_m = 3\text{GPa}$ و $\nu_m = 0.38$ و برای ناهمگنی با خواص $E_i = 70\text{Pa}$ و $\nu_i = 0.2$

۵- تخمین مدول ارتجاعی با در نظر گرفتن ریز

الیاف به عنوان نواحی تهی

با توجه به اینکه ریزالیاف در تحمل بار فشاری نقشی ندارند، می‌بایست به صورت فضای تهی مدل شوند. وقتی ریزالیاف در جهت‌های مختلف به صورت یکنواخت توزیع شده باشند، می‌توان از اینکلوزن کروی به جای آن‌ها استفاده کرد و دیگر نیازی به استفاده از تابع توزیع جهت نیست [۱۲]. لذا در اینجا می‌بایست از اینکلوزن‌های کروی توخالی استفاده شود. بر اساس اطلاعات ارائه شده در مرجع [۹]، برای در نظر گرفتن نقش حفره‌های کروی می‌توان از روابط جدول ۱ استفاده نمود.

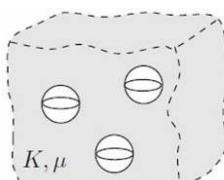
$$K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (25)$$

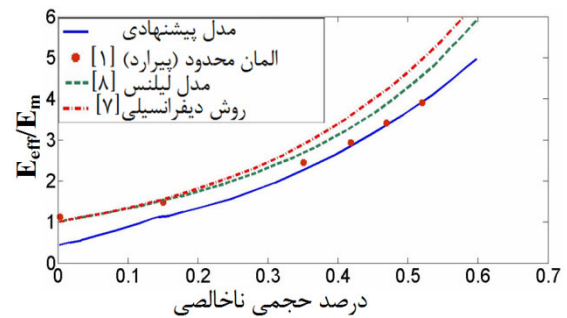
$$\alpha = \frac{1+\nu}{3(1-\nu)}$$

$$\beta = \frac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)} \quad (26)$$

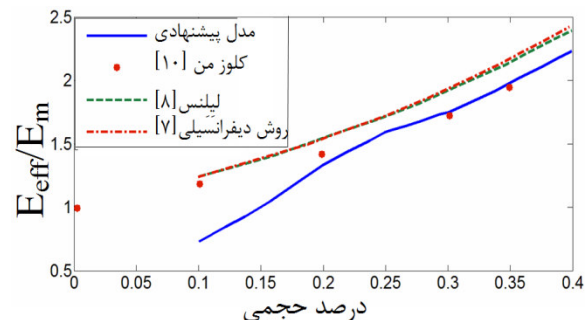
جدول ۱ ثوابت مؤثر برای ماده ایزوتروپیک شامل حفره کروی [۹]

حفره کروی توخالی	ثوابت مؤثر ماده همگن شده
	$K^* = K \left(1 - \frac{c}{1-\alpha(1-c)} \right)$
	$\mu^* = \mu \left(1 - \frac{c}{1-\beta(1-c)} \right)$

دیفرانسیلی و مدل لیلنس با نتایج المان محدود [۱۰] مورد مقایسه قرار گرفته است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، برای درصد حجمی‌های بالای ۳۰ درصد، نزدیکی بیشتری بین نتایج FEM و مدل پیشنهادی با مقدار c'_1 ارائه شده در معادله (۲۴) وجود دارد.



شکل ۷ مقایسه نتایج مدل پیشنهادی با روش‌های دیگر برای ماتریس با خواص $E_m = 3.16\text{GPa}$ و $\nu_m = 0.35$ و برای ناهمگنی با خواص $E_i = 73.1\text{GPa}$ و $\nu_i = 0.18$



شکل ۸ مقایسه نتایج مدل پیشنهادی با روش‌های دیگر برای ماتریس با خواص $E_m = 21\text{GPa}$ و $\nu_m = 0.25$ و برای ناهمگنی با خواص $E_i = 210\text{GPa}$ و $\nu_i = 0.25$

مثال ۳: در یک ماده مرکب ماتریس از رزین اپوکسی با $E_m = 3\text{GPa}$ و ضریب پواسون $\nu_m = 0.38$ و عناصر تقویت کننده، گوی‌هایی از جنس شیشه با مدول $E_i = 70\text{Pa}$ و ضریب پواسون $\nu_i = 0.2$ می‌باشد. داده‌های نتیجه تحلیل المان محدود برای تعیین مدول ارتجاعی این ماده بر حسب درصد حجمی در مرجع [۱۴] آمده است. در شکل ۹ نتایج استفاده از روش‌های دیفرانسیلی و لیلنس و همچنین مدل پیشنهادی به همراه نتایج المان محدود [۱۴] آورده شده است. با توجه به شکل ۹، واضح است که جواب‌های روش پیشنهادی نزدیکی بهتری با نتایج المان محدود دارد.



شکل ۱۰ تصویر سنگ‌دانه‌های به‌کار رفته در نمونه‌های ساخته‌شده

۶-۱-۲- رزین

از رزین اپوکسی در ساخت نمونه‌ها استفاده شده است. این رزین می‌بایست به نسبت ۱۰۰ به ۱۱ با سفت‌کننده مخلوط شود. برخی از مشخصات مکانیکی این رزین در جدول ۳ آورده شده است. این رزین، به دلیل چسبندگی پایینی که دارد، سطح دانه‌ها را به خوبی آغشته می‌کند و اتصال خوبی بین دانه‌ها ایجاد می‌نماید.

جدول ۳ برخی از خواص مکانیکی مخلوط رزین اپوکسی و سفت‌کننده پس از عمل‌آوری

چگالی	۱۱۱۰ kg/m ³
مدول ارتجاعی	۲/۷۸ GPa
ضریب پواسون	۰/۳۲

۶-۱-۳- ریزالیاف شیشه

نوع الیاف مورد استفاده الیاف شیشه معمولی با طول ۶ میلی‌متر است. ریزالیاف شیشه برای افزایش چقرمگی و توانایی جذب انرژی و افزایش مقاومت کششی و خمشی به مخلوط اضافه می‌شود. ولی با توجه به اینکه اثر مثبتی در سفتی فشاری ندارد، در این تحقیق به عنوان ناحیه تهی در نظر گرفته شده است. باید توجه داشت، مقاومت نهایی کششی و فشاری با افزودن ریزالیاف شیشه بالا می‌رود.

۶-۲- ترکیبات به‌کار رفته

در این تحقیق، نمونه‌ها با دو ترکیب متفاوت ساخته شده‌اند. با افزایش هرچه بیشتر تعداد نمونه‌های مورد آزمایش و حوزه‌ای

اختلاف چگالی نمونه بتن ساخته‌شده با چگالی تئوری ناچیز (تقریباً ۰/۱۳ gr/cm³) بوده، به همین سبب در محاسبات وارد نشده است. در واقع اگر چگالی میانگین نمونه‌ها (gr/cm³) ۱/۹۸ (۱/۹۹۳ gr/cm³) مقایسه شود، درصد حباب هوا برابر ۱/۷۲ درصد حجمی به‌دست می‌آید.

در تحقیق فعلی، جهت به‌حداقل رساندن درصد حباب‌ها از روش ویبره استفاده شد. همچنین، در تمامی فرایندها، مثل هم‌زدن رزین و هاردنر دقت کافی جهت عدم تولید حباب صورت گرفته است. باید توجه داشت که مقدار حباب‌های هوا تا حد زیادی تابع نوع دانه‌بندی است و نوع دانه‌بندی مورد استفاده در این تحقیق قبلاً توسط شکریه و همکاران [۱۶] بهینه شده است. پیش‌عمل‌آوری نیز سبب خروج مقادیر باقی مانده حباب هوا از درون مخلوط می‌شود.

۶- ساخت نمونه‌ها و انجام آزمایش‌ها

جهت ارزیابی روش پیشنهادی در این تحقیق با آزمایش، ۱۲ نمونه بتن پلیمری ساخته و آزمایش شد. ابعاد قالب‌های به‌کار رفته در این آزمایش، مطابق با استاندارد ASTM C39، و ابعاد $\phi 7/5 \text{ cm} * 15 \text{ cm}$ بود. نحوه ساخت نمونه‌ها و همچنین مصالح به‌کار رفته در ادامه آمده است.

۶-۱- مواد به‌کار رفته در ساخت نمونه‌ها

۶-۱-۱- سنگ‌دانه‌ها

مصالح به‌کار رفته در این نمونه‌ها از نوع شن و ماسه سیلیسی است که سفتی بالایی دارد. برخی از خواص مکانیکی این سنگ‌دانه در جدول ۲ آمده است.

جدول ۲ برخی از خواص مکانیکی سنگ‌دانه‌های سیلیسی به‌کار رفته در این تحقیق

چگالی	۲/۴۵ gr/cm ³
مدول ارتجاعی	۴۰ GPa
ضریب پواسون	۰/۲

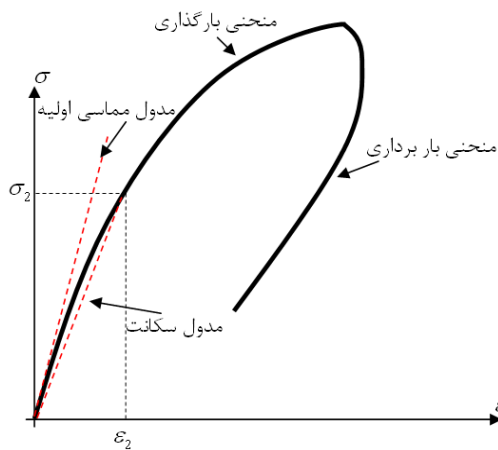
شکل این نوع سنگ‌دانه‌ها اغلب گرد می‌باشد. لذا برای همگن‌سازی می‌توان از اینکلوزن‌های کروی استفاده کرد. تصویر سنگ‌دانه‌های به‌کار رفته در شکل ۱۰ آورده شده است.

۴-۶- آزمایشات

مدول یانگ بتن از رابطه (۲۷) به دست می آید [۱۵]:

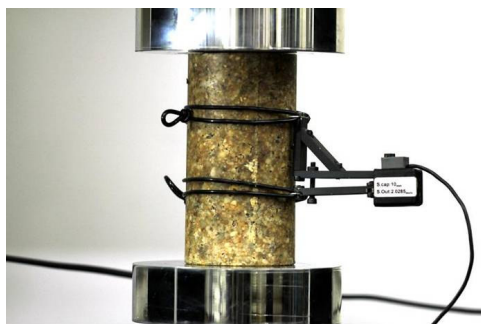
$$E = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\varepsilon_2 - 0.00005} \quad (27)$$

مطابق شکل ۱۲، σ_2 تنش برابر با ۴۰ درصد حد نهایی، σ_1 تنش مربوط به کرنش $\varepsilon_1 = 0.00005$ و ε_2 کرنش در تنش σ_2 است.



شکل ۱۲ تصویر شماتیک منحنی بارگذاری بتن و نحوه محاسبه مدول یانگ (سکانت)

مطابق شکل ۱۳، کرنشها توسط انبساطسنج اندازه گیری شدند. مزیت استفاده از انبساطسنج، اندازه گیری کرنشها در محدوده وسیع تری روی نمونه نسبت به کرنش سنج می باشد.



شکل ۱۳ نمونه ای که روی آن انبساطسنج نصب شده است

۴-۵- نتایج انجام آزمایشها

نتیجه آزمایش بر روی نمونه های بتن پلیمری با ترکیب I در جدول ۶ آورده شده است. داده های خروجی دستگاه به صورت نیرو (N) بر حسب جابه جایی (mm) هستند. جهت تعیین

که از آن نمونه انتخاب می شود، قابلیت اطمینان نتایج به دست آمده بیشتر می شود. در ترکیب I درصد وزنی سنگدانه ها بیشتر است. درصد وزنی اجزای سازنده بتن پلیمری با ترکیب I در جدول ۴ آورده شده است.

جدول ۴ درصد وزنی اجزای نمونه بتن پلیمری با ترکیب I

درصد وزنی	جزء
۱۹	رزین
۰/۵	الیاف شیشه
۳۲/۲	ماسه
۴۸/۳	شن

درصد وزنی اجزای سازنده بتن پلیمری با ترکیب II نیز در جدول ۵ آورده شده است.

جدول ۵ درصد وزنی اجزای نمونه بتن پلیمری با ترکیب II

درصد وزنی	جزء
۲۴	رزین
۰/۵	الیاف شیشه
۳۰/۲	ماسه
۴۵/۳	شن

۶-۳- ابعاد نمونه ها

جهت انجام آزمایشها، ۳ نمونه با ترکیب I و ۳ نمونه با ترکیب II ساخته شد. در ساخت نمونه ها از قالب های استوانه ای با ابعاد $\phi 7/5 \text{ cm} * 15 \text{ cm}$ استفاده شد. نمونه ها به مدت ۷ روز در دمای اتاق عمل آوری شدند. در شکل ۱۱ تصویر نمونه های ساخته شده آورده شده است.



شکل ۱۱ تصویر نمونه بتن های پلیمری ساخته شده

1. Weight fraction

۸- نتیجه گیری

روش‌های عددی و محاسباتی در تخمین خواص مکانیکی مواد مرکب یک رویکرد کم‌هزینه و سریع است که با استفاده از آن دیگر نیازی به انجام آزمایش‌های زمان‌بر و پرهزینه نیست. در این مقاله، برخی از روش‌هایی که امکان مدلسازی رفتار ارتجاعی یک ماده مرکب را داشتند برای بتن پلیمری مورد استفاده قرار گرفتند. همچنین، نتیجه استفاده از این روش‌ها با نتایج به‌دست آمده از آزمایش‌ها نزدیکی خوبی را نشان می‌دهد. مدل پیشنهادی یک رویکرد جدید در همگن‌سازی مواد مرکب با درصد ناخالصی بالاست. در روش پیشنهادی، از این واقعیت که سفتی موری-تاناکا حد پایین خواص ارتجاعی (حد پایین کران هشین-شیتریکمن) است، استفاده شده است. با توجه به نتایج به‌دست آمده در این تحقیق، روش پیشنهادی برای اینکلوزن‌های کروی به جواب‌های بهتری منجر می‌شود. همچنین، این تحقیق بر توانایی روابط میکرومکانیک در تخمین خواص ارتجاعی بتن پلیمری صحنه می‌گذارد.

۹- مراجع

- [1] Pierard O., Friebel C., Doghri I., "Mean-Field Homogenization of Multi-Phase Thermo-Elastic Composites: a General Framework and Its Validation", *Composites Science and Technology*, Vol. 64, 2004, pp. 1587-1603.
- [2] Huang J. H., "Some Closed-Form Solutions for Effective Moduli of Composites Containing Randomly Oriented Short Fibers", *Materials Science and Engineering A*, Vol. 315, 2001, pp. 11-20.
- [3] Eshelby J. D., "The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems", *Proc Roy Soc London, Ser A*, Vol. 241, 1957, pp. 376-96.
- [4] Mori T., Tanaka K., "Average Stress in Matrix and Average Elastic Energy of Materials with Misfitting Inclusions", *Acta Mater*, Vol. 21, 1973, pp. 571-574.
- [5] Friebel Ch., *Mechanics and Acoustics of Viscoelastic Inclusion Reinforced Composites: Micro-Macro Modeling of Effective Properties*, PhD Thesis, Universit'e Catholique de Louvain, Belgique, 2007.
- [6] Hill R., "A Self-Consistent Mechanics of Composite Materials", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 13, 1965, pp. 213-222.
- [7] McLaughlin R., "A Study of the Differential Scheme for Composite Materials", *Int. J. Engng. Sci*, Vol. 15, 1977, pp. 237-244.

نمودار تنش-کرنش، می‌بایست نیروها بر سطح مقطع قطعه و جابه‌جایی‌ها بر فاصله اولیه دهانه انبساط‌سنج تقسیم شوند.

نتیجه آزمایش بر روی نمونه‌های بتن پلیمری با ترکیب II نیز در جدول ۷ آورده شده است.

جدول ۶ مدول ارتجاعی نمونه‌های بتن پلیمری آزمایش شده

نمونه ۱ (GPa)	نمونه ۲ (GPa)	نمونه ۳ (GPa)	میانگین (GPa)
۱۴/۵۳	۱۴/۲۱	۱۴/۷۵	۱۴/۵۰

جدول ۷ مدول ارتجاعی نمونه‌های بتن پلیمری با ۲۴ درصد رزین

نمونه ۱ (GPa)	نمونه ۲ (GPa)	نمونه ۳ (GPa)	میانگین (GPa)
۱۲/۱۶	۱۱/۶۸	۱۱/۹۵	۱۱/۹۳

۷- مقایسه نتایج آزمایشگاهی و عددی

نتایج تحلیلی و نتایج آزمایشی مربوط به نمونه‌ها با ترکیب I در جدول ۸ آورده شده است. ملاحظه می‌شود که نتایج مدل پیشنهادی نزدیکی بهتری با نتیجه آزمایش‌ها دارد و نسبت به نتایج به‌دست آمده از روش دیفرانسیلی و روش لیلنس خطای کمتری دارد. نتایج تحلیلی و نتایج آزمایشی مربوط به نمونه‌ها با ترکیب II در جدول ۹ آورده شده است. در مورد نمونه‌ها با ترکیب II نیز نتیجه استفاده از مدل پیشنهادی نزدیکی بهتری با نتیجه آزمایش‌ها دارد و نسبت به نتایج به‌دست آمده از روش دیفرانسیلی و روش لیلنس خطای کمتری دارد.

جدول ۸ مقایسه نتایج تئوری و عملی

مدل	روش	روش	آزمایش	مدول ارتجاعی (GPa)
پیشنهادی	دیفرانسیلی [۲۳]	لیلنس [۲۴]	(میانگین)	
۱۴/۳۹	۱۵/۱۷	۱۵/۸۱	۱۴/۵۰	
۰/۷۶	۴/۶۲	۹/۰۳	.	خطای نسبی (%)

جدول ۹ مقایسه نتایج تئوری و عملی

مدل	روش	روش	آزمایش	مدول ارتجاعی (GPa)
پیشنهادی	دیفرانسیلی [۲۳]	لیلنس [۲۴]	(میانگین)	
۱۲/۴۲	۱۲/۶۳	۱۲/۹۵	۱۱/۹۳	
۴/۱۱	۵/۸۷	۸/۵۵	.	خطای نسبی (%)

- Formula”, *Computational Materials Science*, Vol. 31, 2004, pp. 337-346.
- [13] Schjodt-Thomsen J., Pyrz R., “The Mori-Tanaka Stiffness Tensor: Diagonal Symmetry, Complex Fibre Orientations and Non-Dilute Volume Fractions”, *Mechanics of Materials*, Vol. 33 2001, pp. 531-544.
- [14] Segurado J., Llorca J., “A Numerical Approximation to the Elastic Properties of Sphere-Reinforced Composites”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 50, 2002, pp. 2107- 2121.
- [15] Tia M., Liu Y., Brown D., *Modulus of Elasticity, Creep and Shrinkage of Concrete*, Final Report, Department of Civil & Coastal Engineering College of Engineering University of Florida, May 2005.
- [8] Lielens G., *Micro-Macro Modeling of Structured Materials*, PhD Thesis, Universite Catholique de Louvain, Belgium, 1999.
- [9] Gross D., Seelig T., *Fracture Mechanics: With an Introduction to Micromechanics*, Newyork, Springer, 2006.
- [10] Klusemann B., Svendsen B., “Homogenization Methods for Multi-Phase Elastic Composites: Comparisons and Benchmarks”, *Technische Mechaik*, Vol. 30, No. 4, 2010, pp. 374-386.
- [11] Hashin Z., Shtrikman S., “A Variational Approach to the Theory of the Elastic Behaviour of Multiphase Materials”, *J Mech Phys Solids*, Vol. 11, 1963, pp. 127-40.
- [12] Teng T. L., Chu Y. A., Chang F. A., Chin H. S., “Calculating the Elastic Moduli of Steel-Fiber Reinforced Concrete Using a Dedicated Empirical