



## Discrete-Time Control of a Nonlinear System with Integrating the Integral Terminal Sliding Mode and Model Predictive Control

### ARTICLE INFO

#### Article Type

Original Research

#### Authors

Shafiei M.H.\*<sup>1</sup> PhD,  
Azadian A.<sup>1</sup> MSc

#### How to cite this article

Shafiei M.H, Azadian A. Discrete-Time Control of a Nonlinear System with Integrating the Integral Terminal Sliding Mode and Model Predictive Control. Modares Mechanical Engineering, 2019;19(11):2697-2704.

### ABSTRACT

In this paper, a sliding mode predictive control method is proposed for function improvement of affine discrete-time nonlinear systems using integral terminal sliding mode method (ITSMC). The proposed method is based on the integration of terminal integral sliding mode method and model predictive controller which leads to using the advantages of both methods. Indeed, in the proposed method, integral and terminal characteristics of terminal integral sliding mode method are used to design the sliding surface in order to reduce the error (in reaching phase) and to converge to the origin (in sliding phase). Moreover, the chattering phenomenon which usually exists in sliding mode based methods will be decreased using the model predictive controller. The proposed control method has the capability to eliminate the effect of external disturbances and uncertainties. In this paper, it is shown that the model predictive method decreases the chattering phenomenon more than using the saturation function in the control law of the sliding mode method. In addition, using numerical and functional examples, the performance of the proposed method in improving the quality of the system response in the presence of external disturbances and uncertainties is illustrated.

**Keywords** Model Predictive Control; Terminal Sliding Mode Control; Nonlinear Discrete-Time System

<sup>1</sup>Department of Electrical & Electronic Engineering, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran

#### \*Correspondence

Address: Department of Electrical & Electronic Engineering, Shiraz University of Technology, Modares Boulevard, Shiraz, Iran. Postal code: 7155713876  
Phone: +98 (71) 37354500  
Fax: +98 (71) 37353502  
shafiei@sutech.ac.ir

#### Article History

Received: August 18, 2018  
Accepted: May 21, 2019  
ePublished: November 2, 2019

### CITATION LINKS

[1] Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial. Proceedings of the IEEE [2] Robust output regulation via sliding mode control and disturbance observer: application in a forced Van Der Pol chaotic oscillator [3] A new nonlinear model predictive control scheme for discrete-time system based on sliding mode control [4] Model predictive and sliding mode control of a boost converter [5] A model predictive control approach to predict sliding surface [6] Multirate sliding mode disturbance compensation for model predictive control [7] Model predictive sliding mode control: for constraint satisfaction and robustness [8] Model predictive output integral sliding mode control [9] Micro-nanopositioning using model predictive output integral discrete sliding mode control [10] Hierarchical control strategy based on robust MPC and integral sliding mode application to a continuous photobioreactor [11] A decentralized variable structure control algorithm for robotic manipulators [12] A discrete-time terminal sliding-mode control approach applied to a motion control problem [13] Digital integral terminal sliding mode predictive control of piezoelectric-driven motion system [14] Modelling and control of robot manipulators

## کنترل گسسته- زمان یک سیستم غیرخطی با تلفیق روش‌های مد لغزشی نهایی انتگرالی و کنترل پیش‌بین

محمدحسین شفیعی\* PhD

دانشکده برق و الکترونیک، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

امیر آزادیان MSc

دانشکده برق و الکترونیک، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

### چکیده

در این مقاله با استفاده از روش مد لغزشی انتگرالی نهایی (ITSMC) یک کنترل‌کننده پیش‌بین برای بهبود عملکرد حلقه بسته سیستم‌های غیرخطی گسسته- زمان مستوی (affine) ارائه می‌شود. در روش مد لغزشی انتگرالی نهایی با وجود مزیت‌های آن نوسانات نامطلوب موجب کاهش کارایی و افزایش تلفات سیگنال کنترلی می‌شود. در این مقاله با استفاده از روش کنترل‌کننده پیش‌بین نوسانات در سیستم حلقه بسته به طور چشمگیری کاهش می‌یابد. در حقیقت در روش پیشنهادی برای طراحی مد لغزشی از دو ویژگی انتگرالی و نهایی‌بودن برای کاهش خطا نسبت به سطح لغزش (در فاز دستیابی) و تسریع در روند میل‌کردن به مبدأ (در فاز لغزش) استفاده می‌شود. از دیگر مزیت‌های روش پیشنهادی امکان مواجهه با اثرات زیان‌بار اغتشاش خارجی و عدم قطعیت‌هاست. در این مقاله نشان داده می‌شود که این اثرات زیان‌بار با استفاده از روش پیش‌بین در مقایسه با استفاده از تابع اشباع در قانون کنترلی روش مد لغزشی، کاهش بیشتری خواهد داشت. در بخش شبیه‌سازی عملکرد روش پیشنهادی در بهبود کیفیت پاسخ سیستم در مقابله با عوامل خارجی و نامعینی‌ها با استفاده از مثال‌های ریاضی و کاربردی نشان داده می‌شود.

**کلیدواژه‌ها:** کنترل پیش‌بین مدل، کنترل مد لغزشی انتگرالی نهایی، سیستم غیرخطی گسسته- زمان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۵/۲۷

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۲/۳۱

\*نویسنده مسئول: shafiei@sutech.ac.ir

### مقدمه

امروزه طراحی سیستم‌های کنترل دیجیتال و زمان گسسته بخش مهمی از علم کنترل را به خود اختصاص داده است. خصوصاً در مواردی که عوامل داخلی و خارجی مخرب، ناشی از اغتشاش‌های وارده به سیستم یا نامعینی‌های مدل، موجب تخریب عملکرد سیستم کنترلی شود. یکی از روش‌های مطرح در این زمینه برای کاهش اثر اغتشاش و عدم قطعیت‌ها، روش کنترل مد لغزشی است. تحقیقات در زمینه کنترل مد لغزشی از گذشته تا کنون به وفور در مقالات یافت می‌شود<sup>[1-3]</sup>. کنترل مد لغزشی برای سیستم‌های پیوسته و گسسته- زمان، خطی و غیرخطی و همچنین برای سیستم‌های چند ورودی- چند خروجی، توسعه داده شده است.

علاوه بر روش کنترل مد لغزشی، روش کنترل پیش‌بین مدل نیز بسیار در صنایع مورد استقبال است و بنابراین تلفیق آن‌ها نیز مورد توجه است. تلفیق روش‌های کنترل مد لغزشی و کنترل پیش‌بین مدل در کاهش اثرات اغتشاش بسیار موثرتر از تلفیق کنترل مد لغزشی با روش‌های ساده‌ای چون PID است<sup>[4]</sup>. همچنین می‌توان تابع هزینه را چنان طراحی کرد که هم‌زمان دو هدف دستیابی به سطح لغزش و نزدیک شدن ورودی کنترل به قانون به‌دست‌آمده از روش کنترل مد لغزشی تامین شوند<sup>[5]</sup>. همچنین با در نظر گرفتن دو نرخ متفاوت برای کنترل‌کننده‌های مد لغزشی و کنترل پیش‌بین مدل می‌توان نشان داد که تغییرات سریع در اغتشاش‌های وارده به

سیستم توسط کنترل مد لغزشی برطرف شده و قانون کنترل با نرخ پایین‌تر از طریق کنترل‌کننده پیش‌بین مدل تعیین می‌گردد<sup>[6]</sup>. در مرجع<sup>[7]</sup> این روش تلفیقی برای برآورده کردن محدودیت‌های موجود بر ورودی و حالت سیستم، توسعه داده شده است. همچنین در روش ارائه شده در مرجع<sup>[8]</sup>، از ویژگی‌های هر دو روش کنترل مد لغزشی انتگرالی مبتنی بر خروجی و کنترل پیش‌بین مدل بهره برده شده است.

از دیگر روش‌های تلفیقی می‌توان کنترل‌کننده پیشنهادی در مرجع<sup>[9]</sup> را نام برد که در آن سطح لغزش توسط روش انتگرالی مد لغزش مبتنی بر خروجی طراحی شده و انتقال حالات سیستم به سطح توسط کنترل‌کننده پیش‌بین مدل انجام می‌شود. همچنین ترکیب کنترل‌کننده مد لغزشی انتگرالی با کنترل پیش‌بین مدل به منظور کاهش خطای خطی‌سازی در مرجع<sup>[10]</sup> مورد استفاده قرار گرفته است. به طور کلی، در روش کنترل مد لغزشی، فاز دستیابی، به نحوی طراحی می‌شود که به صورت زمان محدود انجام شود؛ در حالی که در فاز لغزش متغیر، حالت سیستم می‌تواند در زمان نامحدود و به طور مجانبی همگرا شود. جهت زمان محدود نمودن همگرایی متغیر حالت، روش‌هایی چون کنترل مد لغزشی نهایی توسعه داده شده است<sup>[11, 12]</sup>. همچنین، تلفیق روش‌های کنترل مد لغزش انتگرالی نهایی و کنترل پیش‌بین مدل برای مقابله با اغتشاش، اما جهت کنترل سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان ارائه شده است<sup>[13]</sup>.

در این مقاله یک سیستم غیرخطی گسسته- زمان به فرم مستوی (خطی نسبت به ورودی یا Affine) در نظر گرفته شده و سپس برای مقابله با اثرات نامطلوب عدم قطعیت و اغتشاش جمع‌شونده، یک کنترل‌کننده مد لغزشی برای آن طراحی می‌شود. از طرف دیگر، برای حذف پدیده وزوز (Chattering) که یکی از مشکلات اصلی روش کنترل مد لغزشی است، از تلفیق این روش با روش کنترل پیش‌بین مدل استفاده می‌شود. در روش پیش‌بین به علت خاصیت پیش‌بینی آینده از نوسانات بی‌مورد حتی‌الامکان پرهیز می‌شود، به نحوی که کارایی این روش در کاهش وزوز بسیار بیشتر از جایگزین کردن تابع ناپیوسته کنترل مد لغزشی با تقریب‌های پیوسته آن است. در نهایت با ترکیب دو روش ذکر شده و استفاده از ویژگی‌های زمان محدودبودن و انتگرالی، کنترل پیش‌بین مد لغزشی انتگرالی نهایی برای سیستم غیرخطی ارائه می‌شود.

ساختار این مقاله بدین شرح است: در ادامه، در بخش ۲ بیان مسئله مربوط به این مقاله انجام می‌شود. روش پیشنهادی برای حل مسئله در بخش ۳ ارائه می‌شود. نتایج شبیه‌سازی‌ها و نتیجه‌گیری کار نیز به ترتیب در بخش‌های ۴ و ۵ بیان می‌شود.

### ۲- فرمول‌بندی مسئله

یک سیستم غیرخطی پیوسته زمان با معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \bar{f}(t, x(t)) + \bar{g}(t, x(t))u(t) + \bar{d}(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $x \in R^n$  بردار حالت سیستم و  $u, y \in R$  نیز به ترتیب ورودی و خروجی سیستم هستند. به علاوه  $\bar{d} \in R^n$  بردار ورودی اغتشاشی است. همچنین  $\bar{f}, \bar{g}$  نیز توابع برداری برحسب زمان و حالت در نظر گرفته شده‌اند. فرض کنید که با استفاده از روش‌های گسسته‌سازی، سیستم (۱) به یک سیستم گسسته‌شده معادل تبدیل شود. از جمله این روش‌ها، روش ساده اولی مرتبه اول است که در آن از تعریف مشتق و تقریب مرتبه اول آن استفاده می‌شود

کسری خطای تعقیب تا لحظه  $k$  است؛ به نحوی که:

$$E_k = \sum_{i=0}^k e_i^\alpha \quad (11)$$

که  $0 < \alpha < 1$  و به صورت نسبت دو عدد صحیح فرد در نظر گرفته می‌شود. توجه داشته باشید که به سادگی می‌توان نشان داد:

$$E_k = E_{k-1} + e_k^\alpha \quad (12)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، سطح لغزش انتخاب شده نسبت به متغیر خطا، غیرخطی است و این به دلیل ذات روش کنترل مد لغزشی نهایی است که با استفاده از توان‌های کسری، ویژگی تحقق فاز لغزش در زمان محدود را مهیا می‌سازد. در واقع انتخاب توان‌های کسری کوچکتر از یک، موجب تسریع در روند حرکت متغیر خطا در مرحله لغزش به سمت صفر خواهد شد. با توجه به این، واضح است که اگر  $\alpha = 1$  انتخاب شود، کنترل مد لغزشی متعارف را خواهیم داشت. از سوی دیگر وجود جمله شامل مجموع خطا در زمان‌های قبل نیز بیان‌کننده نگاه میانگین به انرژی سیگنال خطا است و خاصیت انتگرال‌گیری را متضمن می‌شود. همچنین به منظور برقراری هدف اصلی که همانا صفر شدن خطای تعقیب است، سطح لغزش در برگیرنده مبدأ ( $e_k = 0$ ) است.

به قانون کنترل در مرحله لغزش که هدف آن ماندگاری متغیر حالت روی سطح لغزش تا دستیابی به مبدأ است، قانون کنترل معادل ( $u^{eq}$ ) اطلاق می‌شود. برای تعیین این قانون می‌بایست شرط  $s_{k+1} = s_k$  برقرار باشد. در واقع برای ماندن روی سطح لغزش باید تغییرات  $s_k$  صفر شود که شرط فوق این نکته را بیان می‌کند. بنابراین با توجه به رابطه (۱۰) می‌توان نوشت:

$$s_{k+1} = k_1 e_{k+1} + k_2 E_k = k_1 (r_{k+1} - Cx_{k+1}) + k_2 E_k = k_1 r_{k+1} - k_1 Cx_{k+1} + k_2 E_k = s_k$$

که نهایتاً با در نظر گرفتن معادلات تفاضلی سیستم (۶) خواهیم داشت:

$$k_1 r_{k+1} - k_1 C f_k - k_1 C g_k u_k + k_2 E_k = s_k \quad (14)$$

که در آن  $f_k = f(k, x(k))$  و  $g_k = g(k, x(k))$  است. حال با توجه به رابطه (۱۴)، قانون ورودی کنترل در فاز لغزش به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u_k^{eq} = \frac{1}{k_1 C g_k} (k_1 r_{k+1} - k_1 C f_{n,k} - k_1 C \Delta f_k - k_1 C d_k + k_2 E_k - s_k) \quad (15)$$

در اینجا فرض شده است که  $k_1 C g_k$  مخالف صفر است که در غیراین صورت ورودی کنترل قابل اجرا نخواهد بود. بنابراین روش پیشنهادی قابل اعمال به سیستم‌هایی است که در آنها  $C g_k \neq 0$  است.

در ادامه طراحی قانون کنترل در خارج از سطح لغزش که وظیفه سوق‌دادن متغیر حالت سیستم خطای تعقیب به سمت سطح لغزش را بر عهده دارد، انجام می‌شود. همان‌طور که می‌دانید پس از رسیدن به سطح، باقی‌ماندن روی آن برعهده قانون کنترل معادل است که در معادله (۱۵) تعیین شد. برای رسیدن به سطح لغزش روش‌ها و دیدگاه‌های زیادی وجود دارند. از جمله روش‌های مستقیم که مبتنی بر تابع لیاپانوف هستند و روش‌های غیرمستقیم که با توجه به آن‌ها دینامیک سطح لغزش از پیش تعیین می‌شود. در هر دو روش، رسیدن به سطح لغزش در زمان محدود انجام می‌شود. با استفاده از روش اول می‌توان نشان داد که

و معادلات هم‌ارز در حالت گسسته را تعیین می‌کند به طوری که فرض کنید:

$$\dot{x}(t) = \frac{x(t+T) - x(t)}{T} \quad (2)$$

که در آن  $T$  زمان تناوب نمونه‌برداری است و می‌دانیم که برای تقریب مناسب‌تر کافی است مدت زمان‌های نمونه‌برداری  $T$ ، کوچک انتخاب شود. با توجه به رابطه (۲) در زمان نمونه‌برداری  $kT + T$  می‌توان نوشت:

$$x(kT + T) = x(kT) + T \bar{f}(kT, x(kT)) + T \bar{g}(kT, x(kT)) u(kT) + T \bar{d}(kT) \quad (3)$$

که با صرف نظر کردن از دوره تناوب نمونه‌برداری  $T$  در نوشتن روابط، معادله تفاضلی هم‌ارز در حالت گسسته- زمان زیر به دست می‌آید:

$$x(k+1) = f(k, x(k)) + g(k, x(k))u(k) + d(k) \quad (4)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

که در آن:

$$f(k, x(k)) = x(kT) + T \bar{f}(kT, x(kT))$$

$$g(k, x(k)) = T \bar{g}(kT, x(kT)) \quad (5)$$

$$d(k) = T \bar{d}(kT)$$

برای سادگی اجازه دهید آرگومان زمان  $k$  را به عنوان اندیس در متغیرها نشان دهیم به طوری که:

$$x_{k+1} = f(k, x(k)) + g(k, x(k))u_k + d_k$$

$$y_k = Cx_k \quad (6)$$

در ادامه فرضیات مربوط به سیستم (۶) ارائه می‌شود:

**فرض ۱**<sup>[13]</sup>: فرض کنید که سیستم (۶) با عدم قطعیت همراه باشد، به طوری که:

$$f(k, x(k)) = f_n(k, x(k)) + \Delta f(k, x(k)) \quad (7)$$

که در آن  $f_n$  بخش معلوم و  $\Delta f$  بخش نامعلوم تابع  $f$  هستند.

**تعریف ۱**<sup>[13]</sup>: تابع برداری  $v(k)$  از مرتبه  $T^n$  است یا به عبارت دیگر  $v = O(T^n)$  اگر و فقط اگر:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{v}{T^n} \neq 0, \quad \lim_{T \rightarrow 0} \frac{v}{T^{n-1}} = 0 \quad (8)$$

که در آن  $n$  یک عدد صحیح و  $O(T^0) = O(1)$  است.

**فرض ۲**<sup>[13]</sup>: اگر  $\Delta_k$  به صورت  $\Delta_k = \Delta f(k, x(k)) + d_k$  تعریف شود، آن‌گاه:

$$\Delta_k = O(T), \quad \Delta_k - \Delta_{k-1} = O(T^2) \quad (9)$$

### ۳- روش پیشنهادی

در این بخش ابتدا روند طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی انتگرالی نهایی را شرح داده و سپس کنترل‌کننده پیش‌بین مد لغزشی انتگرالی نهایی ارائه می‌شود.

#### ۳-۱- کنترل مد لغزشی انتگرالی نهایی

طراحی کنترل مد لغزشی به طور معمول طی دو مرحله لغزش و دستیابی انجام می‌پذیرد. ابتدا سطح لغزش طراحی می‌شود؛ سپس با توجه به آن، قانون کنترل که متضمن دستیابی حالات سیستم به این سطح و سپس ماندن روی آن است، تعیین می‌گردد. هدف اصلی در طراحی کنترل‌کننده، ردیابی سیگنال مرجع است که طی آن اختلاف سیگنال خروجی  $y_k$  با سیگنال مرجع  $r_k$  به صفر میل می‌کند. بدین منظور سطح لغزش به صورت زیر انتخاب می‌شود:

$$s_k = k_1 e_k + k_2 E_{k-1} \quad (10)$$

که در آن  $e_k = r_k - y_k$  خطای تعقیب نام دارد و  $k_1$  و  $k_2$  ثوابتی مثبت هستند. همچنین  $E_{k-1}$  معادل با مجموع توان‌های

$$s_{k+1} = k_1 r_{k+1} - k_1 C f_k - k_1 C \Delta f_k - k_1 C g_k \frac{1}{k_1 C g_k} (k_1 r_{k+1} - k_1 C f_k + k_2 E_k - s_k) - k_1 C g_k u_k^* - k_1 C d_k + k_2 E_k \quad (25)$$

بنابراین با ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$s_{k+1} = -k_1 C \Delta f_k - k_1 C d_k + s_k - k_1 C g_k u_k^* \quad (26)$$

اکنون با توجه به تعریف  $\Delta_k = \Delta f_k + d_k$ ، می‌توان نوشت:

$$s_{k+1} = -k_1 C \Delta_k + s_k - k_1 C g_k u_k^* \quad (27)$$

با ادامه این روند برای سایر زمان‌ها در افق پیش‌بین داریم:

$$s_{k+2} = -k_1 C \Delta_{k+1} + s_{k+1} - k_1 C g_{k+1} u_{k+1}^* = -k_1 C \Delta_k - k_1 C \Delta_{k+1} + s_k - k_1 C g_k u_k^* - k_1 C g_{k+1} u_{k+1}^* \quad (28)$$

$$s_{k+N} = -k_1 C \Delta_k - k_1 C \Delta_{k+1} - \dots - k_1 C \Delta_{k+N-1} + s_k - k_1 C g_k u_k^* - \dots - k_1 C g_{k+N-1} u_{k+N-1}^*$$

اکنون متغیرها به صورت برداری تعریف می‌شود. به عبارت دیگر، با تعریف

$$S_{k+1} = [s_{k+1}, \dots, s_{k+N}]^T, U_k = [u_k^*, \dots, u_{k+N-1}^*]^T \quad (29)$$

داریم:

$$J = S_{k+1}^T S_{k+1} + \omega U_k^T U_k \quad (29)$$

همچنین می‌توان روابط (۲۸) را به صورت بسته در یک قالب ماتریسی به صورت زیر نوشت:

$$S_{k+1} = s_k W - F \Lambda_k - G U_k \quad (30)$$

که در آن  $\Lambda_k = [\Delta_k \dots \Delta_{k+N-1}]^T$ ،  $W = [1 \dots 1]^T$  و همچنین:

$$G = \begin{bmatrix} k_1 C g_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ k_1 C g_k & k_1 C g_{k+1} & 0 & \dots & 0 \\ k_1 C g_k & k_1 C g_{k+1} & k_1 C g_{k+2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1 C g_k & k_1 C g_{k+1} & k_1 C g_{k+2} & \dots & k_1 C g_{k+N-1} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$F = \begin{bmatrix} k_1 C & 0 & 0 & \dots & 0 \\ k_1 C & k_1 C & 0 & \dots & 0 \\ k_1 C & k_1 C & k_1 C & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1 C & k_1 C & k_1 C & \dots & k_1 C \end{bmatrix}$$

اکنون، با جای‌گذاری رابطه (۳۰) در رابطه (۲۹) و اندکی ساده‌سازی داریم:

$$(32)$$

$$J = (s_k W - F \Lambda_k)^T (s_k W - F \Lambda_k) - 2(s_k W - F \Lambda_k)^T G U_k + U_k^T (G^T G + \omega I) U_k$$

به منظور یافتن کنترل‌کننده بهینه، با مشتق‌گیری از تابع هزینه نسبت به بردار  $U_k$  و برابر صفر قرار دادن آن داریم:

$$(33)$$

$$\frac{\partial J}{\partial U_k} = -2(s_k W - F \Lambda_k)^T G_k + 2(G^T G + \omega I) U_k = 0$$

و در نتیجه:

$$U_k^T = (G^T G + \omega I)^{-1} (s_k W - F \Lambda_k)^T G \quad (34)$$

در نهایت، سیگنال کنترلی  $u_k^*$  (اولین عنصر بردار  $U_k$ ) برابر است با:

شرط دستیابی در زمان محدود برآورده می‌شود، اگر از ورودی ناپیوسته زیر استفاده شود:

$$u_k^{sw} = K \text{sign}(s_k) \quad (16)$$

که در آن  $K = \frac{k_s}{k_1 C g_k}$  و  $k_s$  یک ثابت حقیقی و مثبت است.

قانون کنترل سویچینگ نام دارد. برای تحقق فازهای دستیابی و لغزش طبق شرط پایداری لیاپانوف لازم است داشته باشیم:

$$|s_{k+1}| < |s_k| \quad (17)$$

زیرا اگر تابع لیاپانوف به صورت  $V_k = s_k^2$  انتخاب شود، برای برقراری فاز دستیابی و رسیدن به سطح  $s_k = 0$  باید داشته باشیم:

$$V_{k+1} - V_k = s_{k+1}^2 - s_k^2 < 0 \quad (18)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که شرط (۱۷) فراهم‌کننده شرط لیاپانوفی (۱۸) خواهد بود. در اینجا برای بررسی شرط دستیابی (۱۷) ابتدا در نظر داشته باشید که:

$$s_{k+1} = k_1 r_{k+1} - k_1 C f_k - k_1 C g_k u_k + k_2 E_k \quad (19)$$

حال با اعمال قانون کنترل که برابر با مجموع قوانین معادل (۱۵) و سویچینگ (۱۶) است، داریم:

$$s_{k+1} - s_k = -k \text{sign}(s_k) \quad (20)$$

با توجه به عبارت  $\text{sign}(s_k)$  در این رابطه به راحتی می‌توان نشان داد که حرکت همواره در جهت کاهش فاصله تا سطح لغزش خواهد بود؛ به عبارت دیگر  $|s_{k+1}| < |s_k|$  است.

### ۳-۲- کنترل پیش‌بین مد لغزشی انتگرالی نهایی

معالات تفاضلی سیستم را (همراه با عدم قطعیت و اغتشاش) به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$x_{k+1} = f_{n,k} + \Delta f_k + g_k u_k + d_k \quad (21)$$

$$y_k = C x_k$$

فرض کنیم جهت کنترل مد لغزشی انتگرالی- نهایی نیز سطح لغزش با توجه به رابطه (۱۰) تعیین شود. همچنین سیگنال ورودی کنترلی به دو بخش تقسیم شود؛ سیگنال‌های  $u_k^{mpc}$  و  $u_k^{sm}$  برای زمانی که حالت سیستم به ترتیب خارج یا روی سطح لغزش قرار دارند.

ابتدا قانون کنترل معادل که در هنگام قرارگیری روی سطح قرار می‌گیرد، طراحی می‌شود. در این قانون کنترلی که در آن از اطلاعات لحظه قبل سیستم استفاده می‌شود، داریم:

$$(22)$$

$$u_k^{sm} = \frac{1}{k_1 C g_k} (k_1 r_{k+1} - k_1 C f_{n,k} - k_1 C (\Delta f_{k-1} + d_{k-1}) + k_2 E_k - s_k)$$

در خارج از سطح لغزش، برای یافتن قانون کنترلی از قانون کنترلی  $u_k^{mpc} = u_k^{eq} + u_k^*$  استفاده می‌شود. در این رابطه  $u_k^{eq}$  مطابق با رابطه (۱۵) و  $u_k^*$  از طریق روش کنترل پیش‌بین مدل (در ادامه) محاسبه می‌شود. فرض کنید تابع هزینه به صورت زیر تعریف شود:

$$J_k = \sum_{j=1}^N (s_{k+j}^T s_{k+j} + \omega (u_{k+j-1}^*)^T u_{k+j-1}^*) \quad (23)$$

که در آن  $\omega$  یک ضریب وزنی مثبت است. از طرف دیگر داریم:

$$s_{k+1} = k_1 r_{k+1} - k_1 C f_k - k_1 C \Delta f_k - k_1 C g_k (u_k^{eq} + u_k^*) - k_1 C d_k + k_2 E_k \quad (24)$$

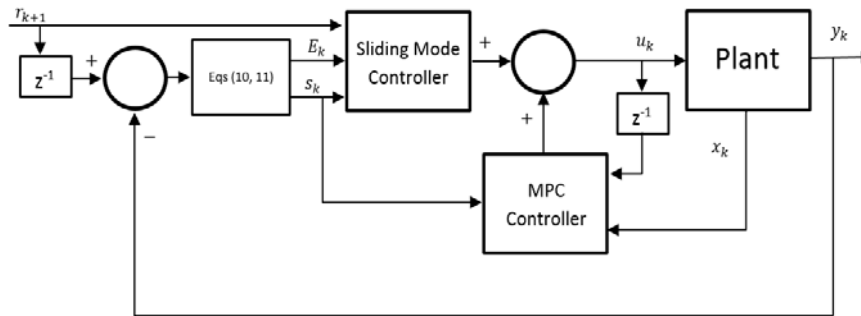
و با توجه به قانون کنترل  $u_k^{eq}$  داریم:

$$F\Lambda_k \approx F\Lambda_{k-1} = F[\Delta_{k-1} \dots \Delta_{k-1}]^T \quad (36)$$

از طرف دیگر مقدار  $\Delta_{k-1}$  را می‌توان از اطلاعات موجود در متغیرهای سیستم تا لحظه  $k$ ام به شکل زیر به دست آورد:

$$k_1 C \Delta_{k-1} = k_1 C x_k - k_1 C f_{k-1} - k_1 C g_{k-1} u_{k-1}$$

با توجه به این که در ماتریس  $F$  عبارت  $k_1 C$  و در ماتریس  $\Lambda_k$  عبارت  $\Delta_{k-1}$  وجود دارد، در قانون کنترلی پیشنهاد شده، عبارت  $F\Lambda_k$  شامل حاصل ضرب این دو است که از رابطه (۳۷) به دست می‌آید. در شکل ۱ دیاگرام بلوکی روش پیشنهادی مشاهده می‌شود:



شکل ۱) دیاگرام بلوکی روش پیشنهادی

#### ۴- نتایج شبیه سازی

در این بخش تئوری مطرح شده در این مقاله روی یک مثال عددی و یک مثال کاربردی اعمال شده و عملکرد مناسب آن نشان داده می‌شود.

#### ۴-۱- مثال عددی

سیستم غیرخطی ذیل را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) - 2 \sin(x_2(k)) + u(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) - x_2(k) + \left(1 + \frac{x_1^2(k)}{2}\right) u(k) \end{cases}$$

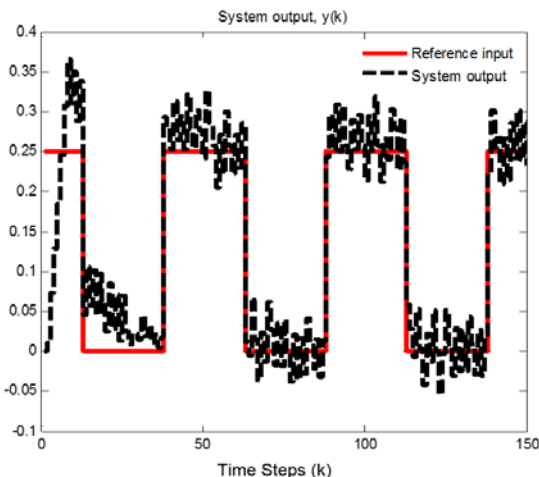
$$y(k) = x_1(k)$$

خروجی این سیستم باید یک شکل موج پالس مربعی مثبت (ورودی مرجع) با دامنه ۰/۲۵ و دوره تناوب ۵۰ ثانیه را دنبال کند. سایر پارامترها نیز به شکل  $k_1 = 2, k_2 = 1, \alpha = N = 20$  انتخاب و مدت زمان شبیه‌سازی ۱۵۰ ثانیه در نظر گرفته شده است. همچنین اغتشاش و عدم قطعیت به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

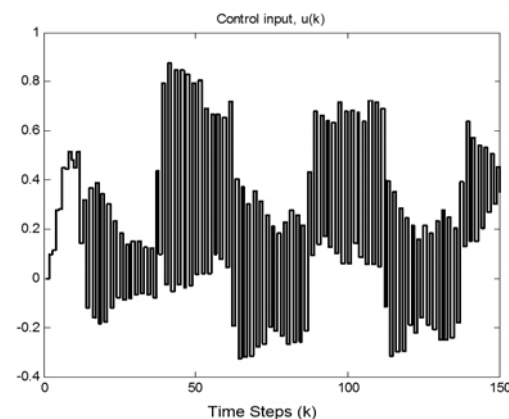
$$\Delta f_k = [0 \ 0.1 x_1^2]^T$$

$$d_k = 0.01 [\sin(k) \ \cos(k)]^T \quad (39)$$

وجود اغتشاشات و نامعینی‌ها در سیستم موجب ایجاد نوسانات در سیستم حلقه بسته و سیگنال کنترلی می‌شود. هرچه مقدار آنها افزایش یابد، دامنه نوسانات بیشتر می‌شود. در اینجا به منظور مقایسه عملکرد روش پیشنهادی در کاهش پدیده وزوز، دو رویکرد را با هم مقایسه می‌نماییم. در رویکرد اول، روش مد لغزشی انتگرالی نهایی با جایگزینی تابع علامت با تابع اشباع (جهت کاهش وزوز) به سیستم (۳۸) اعمال می‌شود. لازم به ذکر است که روش مد لغزشی انتگرالی نسبت به نسخه پایه مد لغزشی دارای نوسانات کمتری است و تابع اشباع نیز از نوسانات می‌کاهد. نتیجه شبیه‌سازی مذکور در نمودارهای ۱ و ۲ دیده می‌شود.



نمودار ۱) پاسخ مثال عددی (خط چین) و سیگنال مرجع (خط ممتد) با استفاده از تابع اشباع



نمودار ۲) تغییرات زمانی سیگنال کنترلی در مثال عددی با استفاده از تابع اشباع



در این سیستم،  $M$  و  $m$  به ترتیب جرم وزنه روی پاندول و جرم ارابه،  $l$  طول پاندول،  $\gamma$  جابجایی ارابه،  $\theta$  زاویه پاندول نسبت به خط عمود و  $u$  نیروی واردشونده به ارابه است. فرض کنید که  $H$  و  $V$  به ترتیب نیروهای افقی و عمودی باشند که از ارابه به پاندول انتقال پیدا می‌کنند. برای سادگی تنها حرکت ۲ بعدی پاندول در نظر گرفته می‌شود و از اصطکاک، جرم میله و جریان هوای اطراف سیستم صرف نظر شوند. هدف در این سیستم قراردادن پاندول در وضعیت عمودی است و اگر پاندول به سمتی منحرف شود، باید دوباره به وضعیت عمودی بازگردد. این عملیات به کمک حرکت دادن ارابه و انتقال نیرو از طریق مفصل به پاندول صورت می‌گیرد. روابط حاکم بر این سیستم با به کارگیری قانون نیوتن به سادگی به دست می‌آید:

(۴۰)

$$\ddot{y} = \frac{1}{M+m} \left[ ml(\dot{\theta})^2 \sin\theta - \frac{ml \cos\theta}{A} \left[ g_0 \sin\theta - \frac{\cos\theta}{M+m} (ml(\dot{\theta})^2 \sin\theta) \right] \right] + \frac{1}{M+m} \left( 1 + \frac{ml \cos^2\theta}{A} \right) u$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{A} \left[ g_0 \sin\theta - \frac{\cos\theta}{M+m} (ml(\dot{\theta})^2 \sin\theta) \right] - \left[ \frac{1}{A(M+m)} \cos\theta \right] u$$

که در آن،  $A = l - (ml \cos^2\theta)/(M+m)$  است. اکنون مدل فضای حالت سیستم را تعیین خواهیم کرد، اگر متغیرهای حالت به صورت  $x_1 = \theta$ ،  $x_2 = \dot{\theta}$ ،  $x_3 = y$ ،  $x_4 = \dot{y}$  تعریف شوند، آن‌گاه به معادلات حالت ذیل خواهیم رسید:

(۴۱)

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{A} \left[ g_0 \sin x_1 - \frac{\cos x_1}{M+m} (ml x_2^2 \sin x_1) \right] - \left[ \frac{1}{A(M+m)} \cos x_1 \right] u$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{M+m} \left[ ml x_2^2 \sin x_1 - \frac{ml \cos x_1}{A} \left[ g_0 \sin x_1 - \frac{\cos x_1}{M+m} (ml x_2^2 \sin x_1) \right] \right] + \frac{1}{M+m} \left( 1 + \frac{ml \cos^2 x_1}{A} \right) u$$

با توجه به روابط به دست آمده، توابع  $f$  و  $g$  در معادلات حالت سیستم به صورت زیر قابل تعریف است:

(۴۲)

$$f = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{A} \left[ g_0 \sin x_1 - \frac{\cos x_1}{M+m} (ml x_2^2 \sin x_1) \right] \\ \frac{\sin x_1}{M+m} \left[ ml x_2^2 - \frac{ml \cos x_1}{A} \left[ g_1 - \frac{\cos x_1}{M+m} ml x_2^2 \right] \right] \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ - \left[ \frac{1}{A(M+m)} \cos x_1 \right] \\ x_4 \\ \frac{1}{M+m} \left( 1 + \frac{ml \cos^2 x_1}{A} \right) \end{bmatrix}$$

اکنون که مدل سیستم مشخص شد، می‌توان به کمک روش پیشنهاد شده، کنترل کننده پیش بین مد لغزشی انتگرالی- نهایی طراحی و شبیه سازی نمود. در این شبیه سازی پارامترها به صورت زیر انتخاب شده‌اند:

(۴۳)

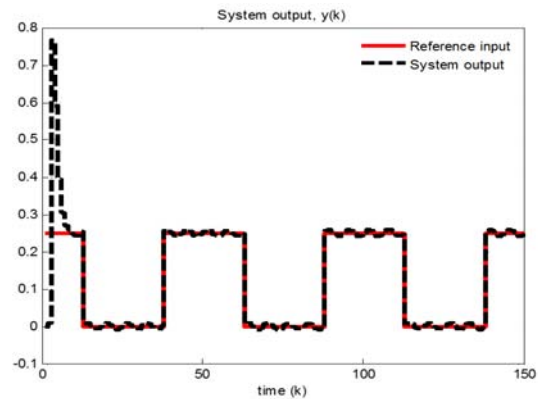
$$M = 10kg, m = 1kg, l = 0.5m, g_0 = 9.8m/s^2$$

در نمودار ۵، رفتار خروجی سیستم ( $x_1 = \theta$ ) پس از کنترل در حضور عدم قطعیت و اغتشاش نشان داده شده است.

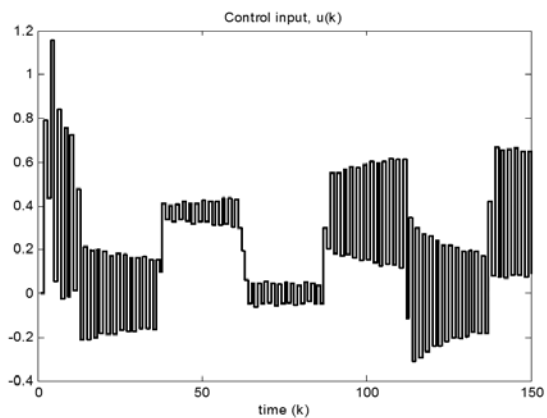
در نمودارهای ۳ و ۴، نتایج اعمال روش کنترل پیش بین مد لغزشی انتگرالی- نهایی در حضور اغتشاش و عدم قطعیت و سیگنال کنترل مربوطه ارائه می‌شود. نتایج، بیانگر کاهش پدیده وزوز در مرحله لغزش و عملکرد مناسب روش پیشنهادی است. در حقیقت، بجز در لحظات آغازین که نوسان‌هایی را شاهد هستیم، عملیات تعقیب به خوبی انجام می‌شود و در ادامه این نوسان‌ها کاهش پیدا می‌کنند.

#### ۴-۲- مثال کاربردی

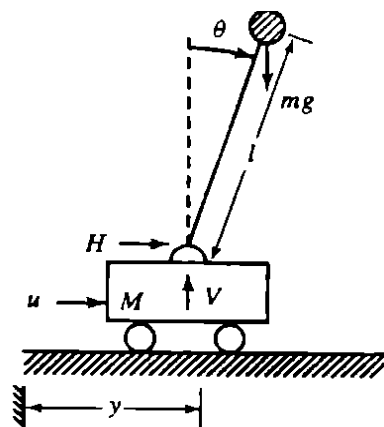
در ادامه از روش کنترل پیش بین مد لغزشی انتگرالی نهایی جهت کنترل یک ارابه با پاندول معکوس استفاده شده و نتایج شبیه سازی ارائه می‌شود. نمایی از ارابه مذکور در شکل ۲ مشاهده می‌شود [14].



نمودار ۳) پاسخ سیستم (خط چین) و سیگنال مرجع (خط ممتد) در مثال عددی با استفاده از روش پیش بین



نمودار ۴) تغییرات زمانی سیگنال ورودی کنترل پیش بین در مثال عددی



شکل ۲) نمایی از سیستم پاندول معکوس روی ارابه روان

سیستم‌های مکانیکی ارائه شده و منطق با قوانین علمی و پژوهشی کشور می‌باشد.

**تعارض منافع:** در این مقاله از تمام کسانی که به نحوی در انجام آن نقش داشته‌اند، نام برده شده است و هیچ‌گونه تضاد و تعارضی با منافع دیگران ندارد.

**سهم نویسندگان:** محمدحسین شفیعی (نویسنده اول)، پژوهشگر اصلی (۷۰٪)؛ امیر آزادیان (نویسنده دوم)، پژوهشگر کمکی (۳۰٪)

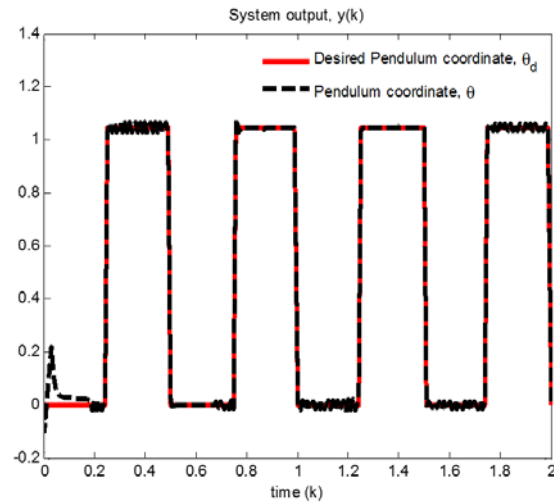
**منابع مالی:** این مقاله بدون حمایت مالی سازمان دولتی یا بخش خصوصی انجام پذیرفته است.

**۶- فهرست علائم**

$J$	فشار ( $\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$ )
$t$	زمان پیوسته
$k$	زمان گسسته
$M, m$	جرم
$T$	زمان نمونه‌برداری
<b>علائم یونانی</b>	
$\theta$	زاویه پاندول
<b>زیرنویس‌ها</b>	
$k$	زمان گسسته
<b>بالانویس‌ها</b>	
mpc	کنترل پیش‌بین مدل
sm	مد لغزشی
Sw	سوییچینگ

**منابع**

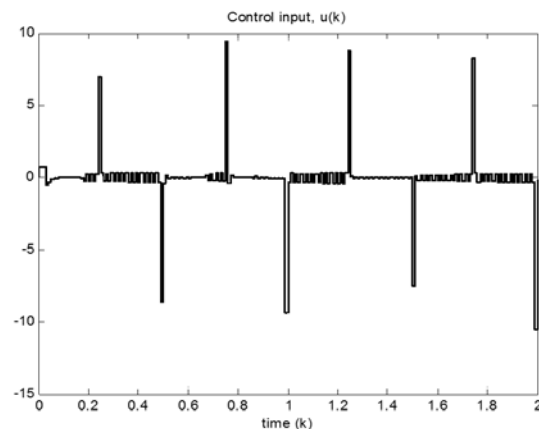
- DeCarlo RA, Zak SH, Matthews GP. Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial. Proceedings of the IEEE. 1998;79(3):212-232.
- Shirvani F, Shafiei MH. Robust output regulation via sliding mode control and disturbance observer: application in a forced Van Der Pol chaotic oscillator. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. 2017;139(9):091015.
- Zhou JS, Liu ZY, Pei R. A new nonlinear model predictive control scheme for discrete-time system based on sliding mode control. American Control Conference. Arlington, VA: Crystal Gateway Marriot; 2001.
- Plaza D, De Keyser R, Bonilla J. Model predictive and sliding mode control of a boost converter. International Symposium on Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion. Ischia, Italy; 2008.
- Montaseri G, Yazdanpanah MJ. A model predictive control approach to predict sliding surface. IFAC Proceedings Volumes. 2008;41(2):9894-9898.
- Raimondo DM, Rubagotti M, Jones CN, Magni L, Ferrara A, Morari M. Multirate sliding mode disturbance compensation for model predictive control. International Journal of Robust Nonlinear Control. 2015;25(16):2984-3003.
- Wang Y, Chen W, Tomizuka M, Alsuwaidan BN. Model predictive sliding mode control: for constraint satisfaction and robustness. ASME 2013 Dynamic Systems and Control Conference. Palo Alto, California; 2013.
- Steinberger M, Castillo I, Horn M, Fridman L. Model predictive output integral sliding mode control. 14th International Workshop on Variable Structure Systems. Nanjing, China; 2016.
- Xu Q, Li Y. Micro-nanopositioning using model



نمودار ۵) زاویه پاندول معکوس (خط چین) و سیگنال مرجع (خط ممتد)

همان‌طور که قابل مشاهده است، خروجی پس از نیم‌سیکل، سیگنال مرجع پالس مربعی را به نحو قابل قبولی دنبال نموده است.

در نمودار ۶، نیروی اعمال‌شده به ارابه حمل‌کننده پاندول مشاهده می‌شود.



نمودار ۶) نیروی کنترلی اعمال‌شده در سیستم پاندول معکوس روی ارابه

**۵- نتیجه‌گیری**

در این مقاله مسئله طراحی کنترل‌کننده برای سیستم‌های غیرخطی زمان گسسته با تلفیق ویژگی‌های کنترل مد لغزشی و کنترل پیش‌بین مدل مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت. در روش پیشنهادی، با ترکیب ویژگی‌های کنترل مد لغزشی و کنترل پیش‌بین مدل، کنترل‌کننده‌ای طراحی شد که علاوه بر مقابله با اغتشاش و عدم قطعیت‌های موجود در مدل بتواند با پدیده نامطلوب وزوز نیز به نحو قابل قبولی مقابله کند. روش کنترل پیشنهادی روی یک مثال عددی و همچنین پاندول معکوس روی ارابه روان اعمال شد. با توجه به نتایج به‌دست‌آمده می‌توان گفت که تعقیب ورودی مرجع پالسی شکل به خوبی انجام شده است.

**تشکر و قدردانی:** بدین وسیله از حمایت‌های دانشگاه صنعتی شیراز در انجام این پژوهش قدردانی می‌گردد.

**تأییدیه اخلاقی:** این مقاله در راستای توسعه روش‌های کنترل

65.

12- Abidi K, Xu JX, She JH. A discrete-time terminal sliding-mode control approach applied to a motion control problem. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2009;56(9):3619-3127.

13- Xu Q. Digital integral terminal sliding mode predictive control of piezoelectric-driven motion system. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2016;63(6):3976-3984.

14- Sciavicco L, Siciliano B. *Modelling and control of robot manipulators*. London: Springer-Verlag, 2000.

predictive output integral discrete sliding mode control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2012;59(2):1161-1170.

10- Bennatie SE, Tebbani S, Dumur D. Hierarchical control strategy based on robust MPC and integral sliding mode application to a continuous photobioreactor. *IFAC-PapersOnLine*. 2015;48(23):212-217.

11- Morgan J, Ozguner U. A decentralized variable structure control algorithm for robotic manipulators. *IEEE Journal on Robotics and Automation*. 1985;1(1):57-